ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ

[Κεφάλαια 1 & 2 μέχρι τη παράγραφο 2.7 του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α.1 α. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.
β. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται 1-1.
γ. Να διατυπώσετε το θεώρημα **Rolle** και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 1x3=3

Α2. Να αποδείξετε το θεώρημα:
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α.3 Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:
- « Αν οι συναρτήσεις $f \; και \; g$ ειναι 1-1 στο R, τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1 στο R ».

1). Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 2

2). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α). $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

β). Αν ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε κατ ανάγκη $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$.

γ). Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1 τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ). Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Αν ισχύουν: $f(x) \le g(x)$, κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε θα ισχύει:

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

ε). Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη
στο x_0.

Μονάδες 2x5=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ και $g(x)=\ln x$

Β1. Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)=\left(g\circ h\right)(x)$.

Μονάδες 7

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

Μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x)=\alpha^{x}+x^{2}-x$, $a>0$ και $f(x)=\ln(x^{2}+1)+e^{x}+\dfrac{x^{3}}{3}-\dfrac{x^{2}}{2}$.

Α. Να δείξετε ότι $\left|\dfrac{2x}{x^{2}+1}\right|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Β. Αν ισχύει $h(x)\ge 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\alpha=e$.

Μονάδες 3

Για $\alpha=e$ τότε:

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>0$ κινείται πάνω στη C_h έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου να είναι $2\dfrac{\mu o\nu}{\sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η απόσταση του $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή κατά την οποίο το M διέρχεται από το σημείο $A(1,\mathrm{h}(1))$.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 4

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση: $6\ln\dfrac{x^{4}+1}{x^{2}+1}+6e^{x^{2}}+2x^{6}-3x^{4}>6e^{x}+2x^{3}-3x^{2}$.

Μονάδες 3

Γ5. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f^{-1} στο σημείο $A(1,f^{-1}(1))$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Α με τεταγμένη 9 και τον
  άξονα $x'x$ στα σημεία Β και Γ με τετμημένες -2 και 3 αντίστοιχα.
- Η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(5)x^5+f(8)x^4-x+1}{f(2)x^4-x+1}$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-f(x+1)=3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,2]$.

Μονάδες 7

Δ5. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ και ισχύει $\left(f(x)-9\right)f''(\mathrm{x})<0$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε $f'(x)<f(x+1)-f(x)$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Τα θέματα επιμελήθηκε ο **Ρουσάλης Ηλίας**, Μαθηματικός - Συγγραφέας.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.