

Αναλυτικές λύσεις

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης - Κανονικές 2001

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Απόδειξη: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Θέτουμε $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Ισχύει ο βασικός τύπος:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Άρα:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot (z_1 z_2)^{\bar{}} = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Επειδή το συζυγές γινομένου είναι το γινόμενο των συζυγών:

$$(z_1 z_2)^{\bar{}} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

οπότε:

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Επειδή τα μέτρα είναι μη αρνητικοί αριθμοί, παίρνουμε τετραγωνική ρίζα και προκύπτει:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

A.2. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Χαρακτηρισμός	Αιτιολόγηση	Παρατήρηση
α. $ z ^2 = z \cdot \bar{z}$	Σωστό	Βασική ιδιότητα του μέτρου μιγαδικού.	
β. $ z ^2 = z^2$	Λάθος	Π.χ. για $z=i$: $ i ^2=1$, ενώ $i^2=-1$.	
γ. $ z = - \bar{z} $	Λάθος	Επειδή $ \bar{z} = z $, η σχέση θα έδινε $ z =- z $, δηλαδή $z=0$ μόνο, όχι για κάθε z .	
δ. $ z = \bar{z} $	Σωστό	Συζυγείς μιγαδικοί έχουν ίδιο μέτρο.	
ε. $ iz = z $	Σωστό	$ iz = i \cdot z =1 \cdot z = z $.	

B.1. Αντιστοιχίσεις

Δίνονται:

$$z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Άρα:

- 1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow \zeta$.
- 2. $|z_1|^2 = |z_1|^2 = 5^2 = 25 \Rightarrow \gamma$.
- 3. $|z_2|^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow \alpha$.
- 4. Όπως είναι τυπωμένο στο PDF, $-|\bar{z}_1| = -|z_1| = -5$, τιμή που δεν υπάρχει στη στήλη Β. Άρα υπάρχει τυπογραφική αστοχία στην εκφώνηση ή στις επιλογές.
- Αν το ζητούμενο ήταν $-|\bar{z}_2|$, τότε $-|\bar{z}_2| = -2 \Rightarrow \epsilon$.
- 5. $|i z_2| = |i| \cdot |z_2| = 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow \beta$.

Με την εκφώνηση όπως φαίνεται, η 4η αντιστοίχιση δεν μπορεί να γίνει από τις διαθέσιμες επιλογές. Αυτό δεν είναι θέμα λύσης· είναι θέμα εκφώνησης.

Β.2. Απόδειξη: αν $|z|=1$, τότε $\bar{z} = 1/z$

Αφού $|z|=1$, έχουμε:

$$|z|^2 = 1$$

Όμως:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Άρα:

$$z \cdot \bar{z} = 1$$

Επειδή $|z|=1$, ο z δεν είναι μηδέν. Διαιρούμε με z :

$$\bar{z} = 1/z$$

ΘΕΜΑ 2ο

Η συνάρτηση είναι:

$$f(x) = \{ \alpha x^2, x \leq 3 ; (1 - e^{(x-3)})/(x-3), x > 3 \}$$

α. Συνέχεια στο $x=3$

Για να είναι η f συνεχής στο $x=3$ πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Από τον πρώτο κλάδο:

$$f(3) = \alpha \cdot 3^2 = 9\alpha$$

Από τον δεύτερο κλάδο, θέτουμε $h=x-3$. Όταν $x \rightarrow 3^+$, τότε $h \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (1 - e^{(x-3)})/(x-3) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1 - e^h)/h$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} (e^h - 1)/h = 1$. Άρα:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (1 - e^h)/h = -1$$

Επομένως από τη συνέχεια:

$$9\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -1/9$$

β. Εφαπτομένη της Cf στο A(4, f(4))

Για $x=4>3$ χρησιμοποιούμε τον δεύτερο κλάδο:

$$f(x) = (1 - e^{-(x-3)}) / (x-3)$$

Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης:

$$f(4) = (1 - e^{-1}) / (1) = 1 - e$$

Παραγωγίζουμε με κανόνα πηλίκου. Θέτουμε $N(x) = 1 - e^{-(x-3)}$, $D(x) = x-3$. Τότε:

$$N'(x) = -e^{-(x-3)}, \quad D'(x) = 1$$

$$f'(x) = [N'D - ND'] / D^2$$

$$f'(x) = [-e^{-(x-3)}(x-3) - (1 - e^{-(x-3)})] / (x-3)^2$$

$$f'(x) = [e^{-(x-3)}(4-x) - 1] / (x-3)^2$$

Στο $x=4$:

$$f'(4) = [e \cdot 0 - 1] / 1 = -1$$

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$y - f(4) = f'(4)(x-4)$$

$$y - (1 - e) = -1(x-4)$$

$$y = 5 - e - x$$

Άρα η εφαπτομένη είναι:

$$y = -x + 5 - e$$

γ. Εμβαδόν χωρίου για $x=1$ και $x=2$

Στο διάστημα $[1,2]$ ισχύει $x \leq 3$, άρα:

$$f(x) = \alpha x^2 = -(1/9)x^2$$

Η f είναι αρνητική στο $[1,2]$, επομένως το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 x^2 / 9 dx$$

$$E = (1/9) \cdot [x^3/3]_1^2 = (1/27)(8-1) = 7/27$$

Άρα:

$$E = 7/27$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

με $\beta^2 < 3\gamma$.

Κοινή βασική παρατήρηση

Θέτουμε:

$$P(t) = t^3 + \beta t^2 + \gamma t$$

Τότε η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$P(f(x)) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη:

$$(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$$

Εξετάζουμε τα πρόσημα των δύο παραγόντων.

Για το τριώνυμο $3u^2 + 2\beta u + \gamma$ η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta_1 = (2\beta)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$$

Επειδή ο συντελεστής του u^2 είναι θετικός, έχουμε:

$$3u^2 + 2\beta u + \gamma > 0 \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}$$

Άρα ειδικά:

$$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$$

Για το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 6$:

$$\Delta_2 = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 16 - 72 = -56 < 0$$

και επειδή έχει θετικό συντελεστή στο x^2 :

$$3x^2 - 4x + 6 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα από την παράγωγη σχέση παίρνουμε:

$$f'(x) = (3x^2 - 4x + 6) / (3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) > 0$$

α. Η f δεν έχει ακρότατα

Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Μια παραγωγίσιμη γνησίως αύξουσα συνάρτηση δεν μπορεί να έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα

Από την προηγούμενη σχέση δείξαμε ότι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, από το γνωστό θεώρημα μονοτονίας, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο $(0,1)$

Πρώτα δείχνουμε ότι υπάρχει ρίζα με Θ. Bolzano.

Για $x=0$:

$$f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1$$

Για $x=1$:

$$f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = 1 - 2 + 6 - 1 = 4$$

Χρειαζόμαστε το πρόσημο του $f(0)$ και του $f(1)$. Παρατηρούμε ότι:

$$t^3 + \beta t^2 + \gamma t = t(t^2 + \beta t + \gamma)$$

Το τριώνυμο $t^2 + \beta t + \gamma$ είναι πάντα θετικό, γιατί από $\beta^2 < 3\gamma$ προκύπτει $\gamma > 0$ και:

$$\beta^2 - 4\gamma < \beta^2 - 3\gamma < 0$$

Άρα το πρόσημο του $t^3 + \beta t^2 + \gamma t$ είναι ίδιο με το πρόσημο του t .

Επομένως:

- αφού $P(f(0)) = -1 < 0$, έχουμε $f(0) < 0$,
- αφού $P(f(1)) = 4 > 0$, έχουμε $f(1) > 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής. Επειδή $f(0) < 0$ και $f(1) > 0$, από Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\xi \in (0, 1)$.

Η ρίζα είναι μοναδική, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση δεν μπορεί να μηδενίζεται σε δύο διαφορετικά σημεία.

Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$$

Επίσης:

$$g(x) = 1/f(x) - x^2$$

α. Απόδειξη ότι $f'(x) = -2x f^2(x)$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα. Θέτουμε $u = xt$. Τότε $t = u/x$ και $dt = du/x$. Για $x \neq 0$:

$$x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt = \int_0^x u f^2(u) du$$

Άρα η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$f(x) = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du$$

Η συνάρτηση $u f^2(u)$ είναι συνεχής, γιατί η f είναι συνεχής. Επομένως, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, παραγωγίζουμε:

$$f'(x) = -2 \cdot x f^2(x)$$

Η σχέση ισχύει και στο $x=0$, καθώς το δεξί μέλος δίνει 0 και η παράγωγος προκύπτει από την ίδια ολοκληρωτική μορφή.

β. Η g είναι σταθερή

Παραγωγίζουμε:

$$g(x) = 1/f(x) - x^2$$

$$g'(x) = -f'(x)/f^2(x) - 2x$$

Από το α ερώτημα έχουμε $f'(x) = -2xf^2(x)$. Άρα:

$$g'(x) = -(-2xf^2(x))/f^2(x) - 2x = 2x - 2x = 0$$

Επομένως η g έχει μηδενική παράγωγο σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα είναι σταθερή.

γ. Εύρεση τύπου της f

Από τη δοσμένη σχέση για $x=0$:

$$f(0) = 1 - 0 = 1$$

Άρα:

$$g(0)=1/f(0)-0^2 = 1$$

Επειδή η g είναι σταθερή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)=1$$

Δηλαδή:

$$1/f(x)-x^2=1$$

$$1/f(x)=1+x^2$$

$$f(x)=1/(1+x^2)$$

δ. Υπολογισμός ορίου

Θέλουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) \eta\mu(2x)$$

Με τον τύπο που βρήκαμε:

$$x f(x) \eta\mu(2x) = x/(1+x^2) \cdot \eta\mu(2x)$$

Επειδή $-1 \leq \eta\mu(2x) \leq 1$, έχουμε:

$$|x/(1+x^2) \cdot \eta\mu(2x)| \leq x/(1+x^2)$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x/(1+x^2)=0$$

Άρα, από το Κριτήριο Παρεμβολής:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) \eta\mu(2x)=0$$