

## Αναλυτικές λύσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου – Κανονικές 2002

### ΘΕΜΑ 1ο

#### Α. Απόδειξη τύπου ολοκληρώματος με παράγουσα

Δίνεται  $f$  συνεχής στο  $[α, β]$  και  $G$  παράγουσα της  $f$  στο  $[α, β]$ . Δηλαδή  $G'(x)=f(x)$  για κάθε  $x \in [α, β]$ .

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν μια συνάρτηση  $G$  είναι παράγουσα της  $f$ , τότε η μεταβολή της  $G$  στο διάστημα  $[α, β]$  ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα της παραγώγου της:

$$\int_{[α, β]} G'(t) dt = G(β) - G(α).$$

Επειδή  $G'(t)=f(t)$ , προκύπτει:

$$\int_{[α, β]} f(t) dt = G(β) - G(α).$$

Άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

#### Β1. Παράγωγος της $f(x)=\eta\mu x$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h}.$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο  $\eta\mu(x+h) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta\mu x (\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h}{h} \right].$$

Επειδή ισχύουν τα γνωστά όρια  $\lim_{h \rightarrow 0} (\eta\mu h / h) = 1$  και  $\lim_{h \rightarrow 0} ((\sigma\upsilon\nu h - 1) / h) = 0$ , παίρνουμε:

$$f'(x) = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

Άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ .

#### Β2. Σωστό / Λάθος

α. Λάθος. Η συνέχεια μόνο στο  $(α, β)$  δεν εξασφαλίζει μέγιστη τιμή στο  $[α, β]$ . Παράδειγμα:  $f(0)=0$  και  $f(x)=1/x$  στο  $(0, 1]$ . Είναι συνεχής στο  $(0, 1]$ , αλλά δεν έχει μέγιστο.

β. Λάθος. Μια 1-1 συνάρτηση δεν είναι υποχρεωτικά γνησίως μονότονη σε γενικό πεδίο ορισμού. Η 1-1 ιδιότητα δεν αρκεί από μόνη της χωρίς πρόσθετες υποθέσεις.

γ. Σωστό. Αν υπάρχει το όριο και το απόλυτο μέτρο της  $f$  τείνει στο 0, τότε και η ίδια η  $f$  τείνει στο 0, αφού  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  και εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής.

δ. Σωστό. Από ολοκλήρωση κατά μέρη με  $u=f(x)$ ,  $dv=dx$ , έχουμε  $du=f'(x)dx$  και  $v=x$ . Άρα  $\int f(x)dx = x f(x) - \int x f'(x)dx$ , μέχρι σταθερά ολοκλήρωσης.

ε. Σωστό. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε υπάρχει περιοχή του  $x_0$  στην οποία οι τιμές της  $f$  είναι θετικές.

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται μιγαδικός  $z$  και  $f(v)=i^v z$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ .

#### α. Απόδειξη ότι $f(3)+f(8)+f(13)+f(18)=0$

Υπολογίζουμε τις δυνάμεις του  $i$  με περίοδο 4:

$$i^3 = -i, \quad i^8 = (i^4)^2 = 1, \quad i^{13} = i^{12} \cdot i = (i^4)^3 \cdot i = i, \quad i^{18} = i^{16} \cdot i^2 = (i^4)^4 \cdot i^2 = -1.$$

Άρα:

$$f(3)+f(8)+f(13)+f(18) = i^3 z + i^8 z + i^{13} z + i^{18} z$$

$$= (-i + 1 + i - 1)z = 0 \cdot z = 0.$$

#### β. Τριγωνομετρική μορφή του $f(13)$

Αν  $|z|=ρ$  και  $\text{Arg}(z)=\theta$ , τότε:

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Επειδή  $i^{13}=i$ , έχουμε:

$$f(13)=i^{13}z=iz.$$

Άρα:

$$f(13)=i \cdot \rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho(i\cos\theta+i^2\sin\theta)=\rho(-\sin\theta+i\cos\theta).$$

Επειδή  $\sin(\theta+\pi/2)=-\cos\theta$  και  $\cos(\theta+\pi/2)=\sin\theta$ , παίρνουμε:

$$f(13)=\rho[\sin(\theta+\pi/2)+i\cos(\theta+\pi/2)].$$

### γ. Εμβαδόν τριγώνου για $|z|=2$ και $\text{Arg}(z)=\pi/3$

Ο μιγαδικός  $z$  έχει εικόνα:

$$z=2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)=2(1/2+i\sqrt{3}/2)=1+i\sqrt{3}.$$

Άρα το αντίστοιχο σημείο είναι  $A(1,\sqrt{3})$ .

Επίσης  $f(13)=iz$ . Πολλαπλασιασμός με  $i$  σημαίνει στροφή κατά  $90^\circ$  γύρω από την αρχή των αξόνων:

$$iz=i(1+i\sqrt{3})=i-\sqrt{3}=-\sqrt{3}+i.$$

Άρα το αντίστοιχο σημείο είναι  $B(-\sqrt{3},1)$ .

Το τρίγωνο έχει κορυφές  $O(0,0)$ ,  $A(1,\sqrt{3})$ ,  $B(-\sqrt{3},1)$ . Το εμβαδόν του είναι:

$$E = 1/2 \cdot |\det(A,B)| = 1/2 \cdot |1 \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3})|$$

$$= 1/2 \cdot |1+3| = 2.$$

Τελική απάντηση:  $E=2$  τετραγωνικές μονάδες.

## ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται  $f,g$  με πεδίο ορισμού το  $R$  και η σύνθεση  $f \circ g$  είναι 1-1.

### α. Απόδειξη ότι η $g$ είναι 1-1

Για να δείξουμε ότι η  $g$  είναι 1-1, παίρνουμε δύο πραγματικούς  $x_1, x_2$  και υποθέτουμε:

$$g(x_1)=g(x_2).$$

Εφαρμόζουμε τη  $f$  και στα δύο μέλη:

$$f(g(x_1))=f(g(x_2)).$$

Δηλαδή:

$$(f \circ g)(x_1)=(f \circ g)(x_2).$$

Επειδή η  $f \circ g$  είναι 1-1, από την ισότητα των τιμών συμπεραίνουμε:

$$x_1=x_2.$$

Άρα η  $g$  είναι 1-1.

### β. Ρίζες της εξίσωσης

Η εξίσωση είναι:

$$g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1).$$

Από το ερώτημα α, η  $g$  είναι 1-1. Άρα, αν  $g(A)=g(B)$ , τότε  $A=B$ . Επομένως:

$$f(x)+x^3-x = f(x)+2x-1.$$

Αφαιρούμε  $f(x)$  από τα δύο μέλη:

$$x^3-x = 2x-1.$$

Άρα:

$$x^3-3x+1=0.$$

Θέτουμε  $P(x)=x^3-3x+1$ . Η  $P$  είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, άρα έχει το πολύ 3 πραγματικές ρίζες.

Εξετάζουμε πρόσημα:

$P(-2)=-8+6+1=-1$  και  $P(-1)=-1+3+1=3$ . Άρα υπάρχει ρίζα στο  $(-2,-1)$ , δηλαδή μία αρνητική ρίζα.

$P(0)=1$  και  $P(1)=1-3+1=-1$ . Άρα υπάρχει ρίζα στο  $(0,1)$ , δηλαδή μία θετική ρίζα.

$P(1)=-1$  και  $P(2)=8-6+1=3$ . Άρα υπάρχει ρίζα στο  $(1,2)$ , δηλαδή δεύτερη θετική ρίζα.

Έχουμε βρει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Επειδή η  $P$  είναι τρίτου βαθμού, δεν μπορεί να έχει περισσότερες από τρεις. Άρα η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

## ΘΕΜΑ 4ο

### α. Απόδειξη ανισότητας ολοκληρωμάτων

Έστω  $h, g$  συνεχείς στο  $[a, b]$  και  $h(x) > g(x)$  για κάθε  $x \in [a, b]$ .

Θέτουμε  $\varphi(x) = h(x) - g(x)$ . Τότε η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  και:

$\varphi(x) > 0$  για κάθε  $x \in [a, b]$ .

Άρα το ολοκλήρωμά της στο  $[a, b]$  είναι θετικό:

$$\int_{[a, b]} \varphi(x) dx > 0.$$

Δηλαδή:

$$\int_{[a, b]} [h(x) - g(x)] dx > 0$$

$$\int_{[a, b]} h(x) dx - \int_{[a, b]} g(x) dx > 0.$$

Επομένως:

$$\int_{[a, b]} h(x) dx > \int_{[a, b]} g(x) dx.$$

### β. Δίνεται $f(x) - e^{(-f(x))} = x - 1$ , $f(0) = 0$

#### i. Έκφραση της $f'$ ως συνάρτηση της $f$

Παραγωγίζουμε τη σχέση:

$$f(x) - e^{(-f(x))} = x - 1.$$

Η παράγωγος του  $-e^{(-f(x))}$  είναι  $+e^{(-f(x))} \cdot f'(x)$ . Άρα:

$$f'(x) + e^{(-f(x))} f'(x) = 1.$$

Παραγοντοποιούμε:

$$f'(x) [1 + e^{(-f(x))}] = 1.$$

Επομένως:

$$f'(x) = 1 / [1 + e^{(-f(x))}].$$

#### ii. Απόδειξη ότι $x/2 < f(x) < x f'(x)$ , για κάθε $x > 0$

Από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$x = f(x) - e^{(-f(x))} + 1.$$

Πρώτα δείχνουμε ότι για  $x > 0$  ισχύει  $f(x) > 0$ . Η συνάρτηση  $\Phi(y) = y - e^{(-y)} + 1$  είναι γνησίως αύξουσα, αφού  $\Phi'(y) = 1 + e^{(-y)} > 0$ . Επίσης  $\Phi(0) = 0$ . Επειδή  $x = \Phi(f(x))$  και  $x > 0$ , παίρνουμε  $f(x) > 0$ .

1η ανισότητα:  $x/2 < f(x)$ .

Αρκεί να δείξουμε  $x < 2f(x)$ . Με  $x = f(x) - e^{(-f(x))} + 1$ , αυτό γίνεται:

$$f(x) - e^{(-f(x))} + 1 < 2f(x)$$

$$1 - e^{(-f(x))} < f(x).$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για  $f(x) > 0$ , επειδή  $e^{(-u)} > 1 - u$  για κάθε  $u > 0$ , άρα  $1 - e^{(-u)} < u$ . Με  $u = f(x)$ , παίρνουμε  $x/2 < f(x)$ .

2η ανισότητα:  $f(x) < x f'(x)$ .

Χρησιμοποιούμε  $f'(x) = 1 / [1 + e^{(-f(x))}]$  και  $x = f(x) - e^{(-f(x))} + 1$ :

$$x f'(x) = [f(x) - e^{-(f(x)+1)}] / [1 + e^{-(f(x))}].$$

Θέλουμε:

$$f(x) < [f(x) - e^{-(f(x)+1)}] / [1 + e^{-(f(x))}].$$

Επειδή ο παρονομαστής είναι θετικός, ισοδύναμα:

$$f(x)[1 + e^{-(f(x))}] < f(x) - e^{-(f(x)+1)}$$

$$f(x)e^{-(f(x))} < 1 - e^{-(f(x)+1)}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με  $e^{f(x)} > 0$ :

$$f(x) < e^{f(x)} - 1.$$

Αυτό ισχύει για  $f(x) > 0$ , επειδή  $e^u > 1 + u$  για κάθε  $u > 0$ . Άρα  $f(x) < x f'(x)$ .

Συνεπώς, για κάθε  $x > 0$ :

$$x/2 < f(x) < x f'(x).$$

### iii. Απόδειξη ότι $1/4 < E < 1/2 f(1)$

Το χωρίο  $\Omega$  ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x=0$ ,  $x=1$  και τον άξονα  $x'x$ . Για  $x \in (0, 1]$  έχουμε  $f(x) > 0$ , άρα:

$$E = \int_0^1 f(x) dx.$$

Από την ανισότητα του ii έχουμε  $x/2 < f(x)$  για κάθε  $x \in (0, 1]$ . Επομένως:

$$\int_0^1 x/2 dx < \int_0^1 f(x) dx.$$

Άρα:

$$1/4 < E.$$

Από την άλλη, από το ii έχουμε  $f(x) < x f'(x)$  για  $x \in (0, 1]$ . Ολοκληρώνουμε:

$$\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 x f'(x) dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη στο δεξί μέλος:

$$\int_0^1 x f'(x) dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - E.$$

Άρα:

$$E < f(1) - E$$

$$2E < f(1)$$

$$E < 1/2 f(1).$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες:

$$1/4 < E < 1/2 f(1).$$