

Αναλυτικές λύσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου - Κανονικές 2003

ΘΕΜΑ 1ο

A. Απόδειξη: παραγωγισιμότητα $\Rightarrow$ συνέχεια

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε είναι συνεχής στο x_0 , δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

Για $x \neq x_0$ γράφουμε:

$$f(x) - f(x_0) = [(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)] \cdot (x - x_0)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) = f'(x_0)$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$$

Άρα, παίρνοντας όρια στη σχέση, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0 .

B. Γεωμετρική σημασία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = [f(\beta) - f(\alpha)]/(\beta - \alpha)$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τη χορδή που ενώνει τα σημεία:

$$A(\alpha, f(\alpha)) \text{ και } B(\beta, f(\beta))$$

Με απλά λόγια: κάπου ανάμεσα στα α και β , η στιγμιαία κλίση της καμπύλης γίνεται ίση με τη μέση κλίση της στο διάστημα.

Γ. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Σωστό	Ισχύει $ z = \bar{z} = -z $, δηλαδή ο μιγαδικός, ο συζυγής και ο αντίθετός του έχουν ίδιο μέτρο.
β	Σωστό	Αν $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του διαστήματος, τότε η f είναι κυρτή στο διάστημα.
γ	Σωστό	Το αόριστο ολοκλήρωμα της παραγώγου είναι η αρχική συνάρτηση συν σταθερά: $\int f'(x) dx = f(x) + c$.
δ	Λάθος	Για κυρτή συνάρτηση, η εφαπτομένη βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση, όχι πάνω.
ε	Λάθος	Η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ είναι αναγκαία σε εσωτερικό τοπικό ακρότατο, όχι ικανή. Π.χ. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, αλλά δεν έχει ακρότατο στο 0.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, και $w = 3z - i\bar{z} + 4$.

α. Υπολογισμός πραγματικού και φανταστικού μέρους του w

Έχουμε:

$$z = \alpha + \beta i \text{ και } \bar{z} = \alpha - \beta i$$

$$3z = 3\alpha + 3\beta i$$

Επίσης:

$$-i\bar{z} = -i(\alpha - \beta i) = -\alpha i + \beta i^2 = -\beta - \alpha i$$

Άρα:

$$w = 3z - i\bar{z} + 4$$

$$w = (3\alpha + 3\beta i) + (-\beta - \alpha i) + 4$$

$$w = (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$$

Επομένως:

$$\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$$

$$\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$$

β. Τόπος των εικόνων του z

Οι εικόνες του w κινούνται στην ευθεία $y = x - 12$. Άρα για το w ισχύει:

$$\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Re}(w) - 12$$

Αντικαθιστούμε τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος:

$$3\beta - \alpha = (3\alpha - \beta + 4) - 12$$

$$3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta - 8$$

$$4\beta - 4\alpha = -8$$

$$\beta - \alpha = -2$$

$$\beta = \alpha - 2$$

Στο μιγαδικό επίπεδο η εικόνα του z έχει συντεταγμένες (α, β) . Αν θέσουμε $x = \alpha$ και $y = \beta$, παίρνουμε:

$$y = x - 2$$

Άρα οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $y = x - 2$.

γ. Μιγαδικός z με ελάχιστο μέτρο

Από το προηγούμενο ερώτημα οι εικόνες του z βρίσκονται στην ευθεία $\beta = \alpha - 2$. Άρα:

$$z = \alpha + \beta i = \alpha + (\alpha - 2)i$$

Το τετράγωνο του μέτρου είναι:

$$|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + (\alpha - 2)^2$$

$$|z|^2 = \alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$|z|^2 = 2\alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$|z|^2 = 2(\alpha - 1)^2 + 2$$

Η ποσότητα $2(\alpha - 1)^2 + 2$ ελαχιστοποιείται όταν:

$$\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Τότε:

$$\beta = \alpha - 2 = 1 - 2 = -1$$

Άρα ο ζητούμενος μιγαδικός είναι:

$$z = 1 - i$$

και το ελάχιστο μέτρο είναι:

$$|z|_{\min} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Μονοτονία, κοίλα και ύπαρξη αντίστροφης

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^4 \geq 0$ και $x^2 \geq 0$, άρα:

$$5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

Επομένως:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, είναι 1-1. Επομένως έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Για τα κοίλα υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$$

Επειδή $10x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το πρόσημο της f'' καθορίζεται από το x .

$$f''(x) < 0 \text{ για } x < 0$$

$$f''(x) = 0 \text{ για } x = 0$$

$$f''(x) > 0 \text{ για } x > 0$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty, 0)$ και είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. Στο $x = 0$ αλλάζει η κυρτότητα, οπότε υπάρχει σημείο καμπής στο $(0, 0)$.

β. Απόδειξη ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$

Χρησιμοποιούμε τη γνωστή ανισότητα:

$$e^x \geq 1 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα, αν $a \geq b$, τότε $f(a) \geq f(b)$.

Εφαρμόζοντας αυτό για $a = e^x$ και $b = 1+x$, παίρνουμε:

$$f(e^x) \geq f(1+x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ. Άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Υπολογίζουμε:

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 5 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

Άρα η εφαπτομένη είναι:

$$y = x$$

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και η γραφική παράσταση της αντίστροφής της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$, δηλαδή η ευθεία $y = x$, είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

δ. Εμβαδόν χωρίου

Το ζητούμενο χωρίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$. Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^3 f^{-1}(x) dx$$

Πρώτα βρίσκουμε το $f^{-1}(3)$. Λύνουμε $f(t)=3$:

$$t^5 + t^3 + t = 3$$

Παρατηρούμε ότι $t = 1$ δίνει:

$$f(1) = 1^5 + 1^3 + 1 = 3$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η λύση είναι μοναδική. Άρα:

$$f^{-1}(3) = 1$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο ολοκληρώματος αντίστροφης συνάρτησης:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

Εδώ $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $f(0)=0$ και $f(1)=3$. Άρα:

$$E = \int_0^3 f^{-1}(x) dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 f(t) dt$$

$$E = 3 - \int_0^1 (t^5 + t^3 + t) dt$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 (t^5 + t^3 + t) dt = [t^6/6 + t^4/4 + t^2/2]_0^1$$

$$= 1/6 + 1/4 + 1/2$$

$$= 2/12 + 3/12 + 6/12 = 11/12$$

Άρα:

$$E = 3 - 11/12 = 36/12 - 11/12 = 25/12$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = 25/12 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) , $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$.

α. Ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας της $f(x)=0$ στο (α, β)

Από τη σχέση $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ προκύπτει ότι οι αριθμοί $f(\gamma)$ και $f(\delta)$ είναι ετερόσημοι.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα με άκρα τα γ και δ , αφού $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$. Άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 ανάμεσα στα γ και δ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 0$$

Επειδή γ και δ ανήκουν στο (α, β) , το x_0 ανήκει επίσης στο (α, β) .

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) .

β. Ύπαρξη ξ_1, ξ_2 με $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$

Αφού $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, ένα από τα $f(\gamma), f(\delta)$ είναι θετικό και το άλλο αρνητικό.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι υπάρχει σημείο $u \in (\alpha, \beta)$ με $f(u) > 0$ και σημείο $v \in (\alpha, \beta)$ με $f(v) < 0$.

1η περίπτωση: Θετική τιμή

Έστω $f(u) > 0$. Επειδή $f(\alpha) = 0$ και $f(\beta) = 0$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[a, u]$ υπάρχει $\rho_1 \in (\alpha, u)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\rho_1) = [f(u) - f(\alpha)] / (u - \alpha) = f(u) / (u - \alpha) > 0$$

Επίσης, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[u, \beta]$ υπάρχει $\rho_2 \in (u, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\rho_2) = [f(\beta) - f(u)] / (\beta - u) = -f(u) / (\beta - u) < 0$$

Άρα η f' παίρνει μία θετική και μία αρνητική τιμή. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στη f' στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(\xi_1) = [f'(\rho_2) - f'(\rho_1)] / (\rho_2 - \rho_1)$$

Ο αριθμητής είναι αρνητικός, διότι $f'(\rho_2) < 0$ και $f'(\rho_1) > 0$, ενώ ο παρονομαστής είναι θετικός. Άρα:

$$f''(\xi_1) < 0$$

2η περίπτωση: αρνητική τιμή

Έστω $f(v) < 0$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[a, v]$ υπάρχει $\sigma_1 \in (\alpha, v)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\sigma_1) = [f(v) - f(\alpha)] / (v - \alpha) = f(v) / (v - \alpha) < 0$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[v, \beta]$ υπάρχει $\sigma_2 \in (v, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\sigma_2) = [f(\beta) - f(v)] / (\beta - v) = -f(v) / (\beta - v) > 0$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στη f' στο $[\sigma_1, \sigma_2]$. Υπάρχει $\xi_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(\xi_2) = [f'(\sigma_2) - f'(\sigma_1)] / (\sigma_2 - \sigma_1)$$

Ο αριθμητής είναι θετικός, ενώ ο παρονομαστής είναι θετικός. Άρα:

$$f''(\xi_2) > 0$$

Συνεπώς υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε:

$$f''(\xi_1) < 0 \text{ και } f''(\xi_2) > 0$$

γ. Ύπαρξη τουλάχιστον ενός σημείου καμπής

Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι η f'' παίρνει και αρνητική και θετική τιμή στο (α, β) .

Επειδή η f'' είναι συνεχής στο (α, β) , η μετάβαση από αρνητικές σε θετικές τιμές ή από θετικές σε αρνητικές τιμές δεν μπορεί να γίνει χωρίς να μηδενιστεί και χωρίς αλλαγή προσήμου σε κάποιο σημείο.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η f'' αλλάζει πρόσημο γύρω από το x_1 .

Αλλαγή προσήμου της δεύτερης παραγώγου σημαίνει αλλαγή κυρτότητας της γραφικής παράστασης.

Επομένως η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής στο (α, β) .