

Αναλυτικές λύσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης - Κανονικές 2004

ΘΕΜΑ 1ο

A. Απόδειξη θεωρήματος Fermat για τοπικό ακρότατο

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 , τότε υπάρχει περιοχή του x_0 τέτοια ώστε $f(x) \leq f(x_0)$.

Για $h > 0$ αρκετά μικρό: $[f(x_0+h)-f(x_0)]/h \leq 0$. Άρα, περνώντας στο όριο $h \rightarrow 0^+$, παίρνουμε $f'_+(x_0) \leq 0$.

Για $h < 0$ αρκετά μικρό: $[f(x_0+h)-f(x_0)]/h \geq 0$, γιατί ο αριθμητής είναι ≤ 0 και ο παρονομαστής < 0 . Άρα, περνώντας στο όριο $h \rightarrow 0^-$, παίρνουμε $f'_-(x_0) \geq 0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , οι δύο πλευρικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι ίσες. Επομένως πρέπει $f'(x_0)=0$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, τότε εφαρμόζουμε την ίδια σκέψη με τις ανισότητες αντίστροφα και πάλι καταλήγουμε ότι $f'(x_0)=0$.

Συμπέρασμα: Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο x_0 , τότε $f'(x_0)=0$.

B. Ορισμός παραγωγισιμότητας

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$$

Ισοδύναμα, όταν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h$$

Γ. Σωστό - Λάθος

- α. Σωστό. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.
- β. Σωστό. Το όριο υπάρχει και είναι A αν και μόνο αν τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα με A .
- γ. Λάθος. Ο σωστός τύπος είναι $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$, όχι $f'(x_0)g'(x_0)$.
- δ. Λάθος. Αν $f'(x) > 0$ στα εσωτερικά σημεία διαστήματος, η f είναι γνησίως αύξουσα, όχι φθίνουσα.
- ε. Σωστό. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού ισχύει $\int_{[\alpha, \beta]} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται $f(x) = x^2 \ln x$.

α. Πεδίο ορισμού - μονοτονία - ακρότατα

Επειδή υπάρχει ο λογάριθμος $\ln x$, πρέπει $x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι $A = (0, +\infty)$.

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot (1/x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

Για $x > 0$ ισχύει $x > 0$, άρα το πρόσημο της f' καθορίζεται από το $2 \ln x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1/2 \Leftrightarrow x = e^{-1/2}.$$

Για $0 < x < e^{-1/2}$: $\ln x < -1/2$, άρα $2 \ln x + 1 < 0$ και $f'(x) < 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x > e^{-1/2}$: $\ln x > -1/2$, άρα $2 \ln x + 1 > 0$ και $f'(x) > 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα στο $x = e^{-1/2}$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο:

$$f(e^{-1/2}) = (e^{-1/2})^2 \cdot \ln(e^{-1/2}) = e^{-1} \cdot (-1/2) = -1/(2e).$$

Δεν υπάρχει μέγιστο, γιατί καθώς $x \rightarrow +\infty$ έχουμε $x^2 \ln x \rightarrow +\infty$.

β. Κυρτότητα - σημεία καμπής

Από $f'(x) = 2x \ln x + x$ παίρνουμε:

$$f''(x) = (2x \ln x + x)' = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3.$$

Λύνουμε $f''(x) = 0$:

$$2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -3/2 \Leftrightarrow x = e^{-3/2}.$$

Για $0 < x < e^{-3/2}$: $f''(x) < 0$, άρα η f είναι κοίλη.

Για $x > e^{-3/2}$: $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή.

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x = e^{-3/2}$, υπάρχει σημείο καμπής εκεί.

Η τεταγμένη του σημείου καμπής είναι:

$$f(e^{-3/2}) = (e^{-3/2})^2 \cdot \ln(e^{-3/2}) = e^{-3} \cdot (-3/2) = -3/(2e^3).$$

Άρα το σημείο καμπής είναι: $K(e^{-3/2}, -3/(2e^3))$.

γ. Σύνολο τιμών

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, φθίνει μέχρι το $e^{-1/2}$ και μετά αυξάνει. Το ολικό ελάχιστο είναι $-1/(2e)$.

Επίσης: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών είναι:

$$f((0, +\infty)) = [-1/(2e), +\infty).$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται $g(x) = e^{xf(x)}$, όπου f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f(3/2) = 0$.

α. Απόδειξη ύπαρξης ξ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{xf(x)}$ είναι επίσης παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Υπολογίζουμε τις τιμές στα άκρα του διαστήματος $[0, 3/2]$:

$$g(0) = e^{0f(0)} = 0 \text{ και } g(3/2) = e^{(3/2)f(3/2)} = 0.$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $[0, 3/2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 3/2)$ και $g(0) = g(3/2)$.

Με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 3/2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Επειδή $g'(x) = e^{xf(x)} + e^{xf(x)} \cdot f'(x) = e^{xf(x)} [f(x) + f'(x)]$, έχουμε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi f(\xi)} [f(\xi) + f'(\xi)] = 0.$$

Επειδή $e^x > 0$, προκύπτει $f(x) + f'(x) = 0$, δηλαδή $f'(x) = -f(x)$.

β. Υπολογισμός του $I(a)$

Αν $f(x) = 2x^2 - 3x$, τότε:

$$g(x) = e^x(2x^2 - 3x).$$

$$\text{Θέλουμε: } I(a) = \int [a, 0] e^x(2x^2 - 3x) dx.$$

Ψάχνουμε παράγουσα της μορφής $F(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$. Τότε:

$$F'(x) = e^x(ax^2 + bx + c) + e^x(2ax + b) = e^x[ax^2 + (b + 2a)x + (c + b)].$$

$$\text{Θέλουμε } F'(x) = e^x(2x^2 - 3x). \text{ Άρα:}$$

$$a = 2, \quad b + 2a = -3 \Rightarrow b + 4 = -3 \Rightarrow b = -7, \quad c + b = 0 \Rightarrow c = 7.$$

Επομένως μια παράγουσα είναι:

$$F(x) = e^x(2x^2 - 7x + 7).$$

Άρα:

$$I(a) = F(0) - F(a) = 7 - e^a(2a^2 - 7a + 7).$$

γ. Όριο του $I(a)$

$$\text{Έχουμε: } I(a) = 7 - e^a(2a^2 - 7a + 7).$$

Όταν $a \rightarrow -\infty$, ισχύει $e^a \rightarrow 0$ και το γινόμενο $e^a(2a^2 - 7a + 7) \rightarrow 0$, επειδή η εκθετική τάση προς το 0 υπερिशύει κάθε πολυωνυμικής αύξησης.

Άρα:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} I(a) = 7.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int [1, x^3] |z|f(t) dt - 3|z+1/z|(x-1) \geq 0, \text{ όπου } z = \alpha + \beta i, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

α. Παραγωγισιμότητα και παράγωγος της g

Η f είναι συνεχής, άρα και η συνάρτηση $t \mapsto |z|f(t)$ είναι συνεχής. Επομένως η συνάρτηση με μεταβλητό άνω άκρο $\int [1, x^3] |z|f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και τον κανόνα αλυσίδας:

$$(\int [1, x^3] |z|f(t) dt)' = |z|f(x^3) \cdot (x^3)' = 3x^2|z|f(x^3).$$

Επίσης:

$$[-3|z+1/z|(x-1)]' = -3|z+1/z|.$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και:

$$g'(x) = 3x^2|z|f(x^3) - 3|z+1/z|.$$

β. Απόδειξη ότι $|z| = |z+1/z|$

Από την υπόθεση ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπολογίζουμε στο $x=1$:

$$g(1) = \int [1, 1] |z|f(t) dt - 3|z+1/z|(1-1) = 0.$$

Άρα η g έχει ολικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x=1$.

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, από το θεώρημα Fermat παίρνουμε $g'(1)=0$.

Από τον τύπο της παραγώγου:

$$g'(1)=3 \cdot 1^2 |z| f(1^3) - 3|z+1/z| = 3|z| f(1) - 3|z+1/z|.$$

Επειδή $f(1)=1$, έχουμε:

$$0=3|z|-3|z+1/z| \Rightarrow |z|=|z+1/z|.$$

γ. Απόδειξη ότι $\operatorname{Re}(z^2)=-1/2$

Θέτουμε $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Τότε $|z|^2=\alpha^2+\beta^2$.

Επίσης:

$$1/z = (\alpha-\beta i)/(\alpha^2+\beta^2).$$

Άρα:

$$\begin{aligned} z+1/z &= \alpha+\beta i + (\alpha-\beta i)/(\alpha^2+\beta^2) \\ &= \alpha(1+1/(\alpha^2+\beta^2)) + \beta(1-1/(\alpha^2+\beta^2))i. \end{aligned}$$

Από τη σχέση $|z|=|z+1/z|$, υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2(1+1/(\alpha^2+\beta^2))^2 + \beta^2(1-1/(\alpha^2+\beta^2))^2.$$

Αναπτύσσοντας το δεξί μέλος:

$$\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2+\beta^2 + [2(\alpha^2-\beta^2)+1]/(\alpha^2+\beta^2).$$

Επειδή $\alpha^2+\beta^2>0$, παίρνουμε:

$$2(\alpha^2-\beta^2)+1=0 \Rightarrow \alpha^2-\beta^2=-1/2.$$

Όμως $z^2=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i$, οπότε $\operatorname{Re}(z^2)=\alpha^2-\beta^2$.

Άρα $\operatorname{Re}(z^2)=-1/2$.

δ. Ύπαρξη ρίζας στο $(2,3)$

Δίνεται επιπλέον ότι $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$\alpha^2-\beta^2=-1/2 \Rightarrow \beta^2-\alpha^2=1/2 \Rightarrow |\beta|>|\alpha|.$$

Επειδή $\alpha>0$, έχουμε $|\alpha|=\alpha$. Αν ήταν $\beta>0$, τότε από $\alpha>\beta$ θα είχαμε $|\beta|=\beta<\alpha=|\alpha|$, άτοπο με $|\beta|>|\alpha|$.

Άρα αναγκαστικά $\beta<0$.

Επομένως:

$$f(2)=\alpha>0 \text{ και } f(3)=\beta<0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.