

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κανονικές Εξετάσεις 2005 - Αναλυτικές λύσεις

Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Απόδειξη Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(α) \neq f(β)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε αριθμό η ανάμεσα στις τιμές $f(α)$, $f(β)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (α, β)$ με $f(x_0) = \eta$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις.

1η περίπτωση: $f(α) < \eta < f(β)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [α, β]$.

Η g είναι συνεχής στο $[α, β]$, επειδή η f είναι συνεχής και η αφαίρεση σταθεράς διατηρεί τη συνέχεια.

Επιπλέον:

- $g(α) = f(α) - \eta < 0$, αφού $f(α) < \eta$.
- $g(β) = f(β) - \eta > 0$, αφού $\eta < f(β)$.

Άρα $g(α) \cdot g(β) < 0$. Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Επομένως $f(x_0) - \eta = 0$, άρα $f(x_0) = \eta$.

2η περίπτωση: $f(β) < \eta < f(α)$.

Με τον ίδιο τρόπο, για $g(x) = f(x) - \eta$ έχουμε $g(α) > 0$ και $g(β) < 0$, άρα πάλι $g(α) \cdot g(β) < 0$. Επομένως, από Bolzano υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ με $g(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = \eta$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, κάθε τιμή η ανάμεσα στις $f(α)$, $f(β)$ λαμβάνεται από τη συνάρτηση σε τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος.

A.2 Ορισμός ασύμπτωτης στο $+\infty$

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, όταν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0.$$

Δηλαδή, όσο το x τείνει στο $+\infty$, η κατακόρυφη απόσταση της γραφικής παράστασης της f από την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ τείνει στο 0.

B. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Λάθος	Αν $f(α) < 0$ και υπάρχει εσωτερική ρίζα, δεν είναι υποχρεωτικό να ισχύει $f(β) > 0$. Παράδειγμα: $f(x) = -(x-1)^2$ στο $[0, 2]$. Έχουμε $f(0) < 0$, $f(1) = 0$, αλλά $f(2) < 0$.
β	Λάθος	Μπορεί να υπάρχει το όριο του γινομένου χωρίς να υπάρχουν τα επιμέρους όρια. Παράδειγμα: $f(x) = 1/x$ και $g(x) = x$ για $x \rightarrow 0$. Τότε $f(x)g(x) = 1$, αλλά το $\lim f(x)$ δεν υπάρχει πεπερασμένο.

Υ	Σωστό	Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την $y=x$ στο $A=(a,a)$, τότε $f(a)=a$. Άρα και $f^{-1}(a)=a$, οπότε το A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .
Δ	Σωστό	Αφού $f(x) \rightarrow 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , οι τιμές της f είναι θετικές και γίνονται όσο μικρές θέλουμε. Επομένως $1/f(x) \rightarrow +\infty$.
Ε	Σωστό	Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν f είναι συνεχής στο Δ , τότε $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$.
ΣΤ	Σωστό	Αν μια συνεχής συνάρτηση δεν μηδενίζεται σε διάστημα, δεν μπορεί να αλλάξει πρόσημο. Αν άλλαζε πρόσημο, από Bolzano θα είχε ενδιάμεση ρίζα.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

α. Ναδειχθεί ότι $1/z_1 = \bar{z}_1/9$

Για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό z ισχύει: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Επειδή $|z_1| = 3$, έχουμε $|z_1|^2 = 9$, άρα:

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 9.$$

Επειδή $z_1 \neq 0$, διαιρούμε με $9z_1$ και παίρνουμε:

$$1/z_1 = \bar{z}_1/9.$$

β. Ναδειχθεί ότι $z_2/z_1 + z_1/z_2$ είναι πραγματικός

Από το προηγούμενο ερώτημα, επειδή $|z_1|=|z_2|=3$, ισχύουν:

$$1/z_1 = \bar{z}_1/9 \text{ και } 1/z_2 = \bar{z}_2/9.$$

Άρα:

$$z_2/z_1 + z_1/z_2 = z_2 \cdot \bar{z}_1/9 + z_1 \cdot \bar{z}_2/9 = (z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2)/9.$$

Θέτουμε $w = z_2 \bar{z}_1$. Τότε $z_1 \bar{z}_2 = \bar{w}$, διότι:

$$\bar{w} = \bar{z}_2 \cdot z_1 = z_1 \bar{z}_2.$$

Άρα:

$$z_2/z_1 + z_1/z_2 = (w + \bar{w})/9 = 2\operatorname{Re}(w)/9.$$

Ο αριθμός $2\operatorname{Re}(w)/9$ είναι πραγματικός. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι πραγματικός.

γ. Ναδειχθεί ότι $|z_1+z_2+z_3| = (1/3)|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$

Επειδή κανένας από τους z_1, z_2, z_3 δεν είναι μηδέν, έχουμε:

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3 \cdot (1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3).$$

Από το α ερώτημα:

$$1/z_1 = \bar{z}_1/9, 1/z_2 = \bar{z}_2/9, 1/z_3 = \bar{z}_3/9.$$

Άρα:

$$1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 = (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)/9 = \overline{(z_1 + z_2 + z_3)}/9.$$

Επομένως:

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = |z_1 z_2 z_3| \cdot |\overline{(z_1 + z_2 + z_3)}|/9.$$

$$\text{Όμως } |z_1 z_2 z_3| = |z_1| |z_2| |z_3| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ και } |\overline{(z_1 + z_2 + z_3)}| = |z_1 + z_2 + z_3|.$$

Άρα:

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 27 \cdot |z_1 + z_2 + z_3| / 9 = 3|z_1 + z_2 + z_3|.$$

Συνεπώς:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = (1/3)|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται $f(x) = e^{\lambda x}$, με $\lambda > 0$.

α. Ναδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Επειδή $\lambda > 0$ και $e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Έστω ότι η εφαπτομένη της C_f εφάπτεται στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

Επειδή $f(x) = e^{\lambda x}$, έχουμε:

$$f(x_0) = e^{\lambda x_0}, \quad f'(x_0) = \lambda e^{\lambda x_0}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο x_0 είναι:

$$y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0).$$

Άρα:

$$y = \lambda e^{\lambda x_0}x + e^{\lambda x_0}(1 - \lambda x_0).$$

Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$, οπότε θέτουμε $x=0, y=0$:

$$0 = e^{\lambda x_0}(1 - \lambda x_0).$$

Επειδή $e^{\lambda x_0} > 0$, προκύπτει:

$$1 - \lambda x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1/\lambda.$$

Τότε:

$$f(x_0) = e^{\lambda \cdot 1/\lambda} = e.$$

Άρα το σημείο επαφής είναι:

$$M(1/\lambda, e).$$

Η εφαπτομένη έχει κλίση:

$$f'(1/\lambda) = \lambda e.$$

Επειδή διέρχεται από την αρχή, η εξίσωσή της είναι:

$$y = \lambda e x.$$

γ. Υπολογισμός του εμβαδού $E(\lambda)$

Το χωρίο περικλείεται από:

- τη γραφική παράσταση $y=e^{(\lambda x)}$,
- την εφαπτομένη $y=\lambda e x$,
- τον άξονα $y'y$, δηλαδή την ευθεία $x=0$.

Το σημείο τομής της καμπύλης με την εφαπτομένη είναι το $M(1/\lambda, e)$. Άρα το εμβαδόν υπολογίζεται για x από 0 έως $1/\lambda$.

Η f είναι κυρτή, αφού $f''(x)=\lambda^2 e^{(\lambda x)} > 0$. Άρα η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της.

Επομένως:

$$E(\lambda) = \int [0, 1/\lambda] (e^{(\lambda x)} - \lambda e x) dx.$$

Υπολογίζουμε:

$$\int e^{(\lambda x)} dx = e^{(\lambda x)}/\lambda, \quad \int \lambda e x dx = \lambda e \cdot x^2/2.$$

Άρα:

$$E(\lambda) = [e^{(\lambda x)}/\lambda - \lambda e \cdot x^2/2] \text{ από } 0 \text{ έως } 1/\lambda.$$

Για $x=1/\lambda$:

$$e^{(\lambda x)}/\lambda - \lambda e \cdot x^2/2 = e/\lambda - \lambda e \cdot (1/\lambda^2)/2 = e/\lambda - e/(2\lambda) = e/(2\lambda).$$

Για $x=0$:

$$e^{(\lambda x)}/\lambda - 0 = 1/\lambda.$$

Άρα:

$$E(\lambda) = e/(2\lambda) - 1/\lambda = (e-2)/(2\lambda).$$

δ. Υπολογισμός ορίου

Ζητείται:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda^2 \cdot E(\lambda)) / (2 + \eta \mu \lambda).$$

Από το προηγούμενο ερώτημα:

$$E(\lambda) = (e-2)/(2\lambda).$$

Άρα:

$$(\lambda^2 \cdot E(\lambda)) / (2 + \eta \mu \lambda) = \lambda^2 \cdot (e-2)/(2\lambda) \cdot 1/(2 + \eta \mu \lambda) = \lambda(e-2)/(2(2 + \eta \mu \lambda)).$$

Επειδή $-1 \leq \eta \mu \lambda \leq 1$, έχουμε:

$$1 \leq 2 + \eta \mu \lambda \leq 3.$$

Επίσης $e-2 > 0$. Άρα το κλάσμα μεγαλώνει χωρίς φράγμα, αφού ο αριθμητής είναι ανάλογος του λ και ο παρονομαστής παραμένει φραγμένος και θετικός.

Επομένως:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda^2 \cdot E(\lambda)) / (2 + \eta \mu \lambda) = +\infty.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$2f'(x) = e^{(x-f(x))}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ και } f(0)=0.$$

α. Ναδειχθεί ότι $f(x) = \ln((1+e^x)/2)$

Από τη δοσμένη σχέση:

$$2f'(x) = e^{(x-f(x))}.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $e^{(f(x))}$:

$$2f'(x)e^{(f(x))} = e^x.$$

Όμως:

$$(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}.$$

Άρα:

$$2(e^{f(x)})' = e^x.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$2e^{f(x)} = e^x + c.$$

Άρα:

$$e^{f(x)} = (e^x + c)/2.$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $f(0)=0$:

$$e^{f(0)} = e^0 = 1.$$

Από τον τύπο:

$$1 = (e^0 + c)/2 = (1+c)/2.$$

Άρα $c=1$.

Επομένως:

$$e^{f(x)} = (1+e^x)/2.$$

Παίρνοντας λογάριθμο:

$$f(x) = \ln((1+e^x)/2).$$

β. Υπολογισμός ορίου

Ζητείται:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\int_0^x f(x-t)dt) / \eta\mu x.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής:

$$u = x - t \Rightarrow du = -dt.$$

Όταν $t=0$, $u=x$. Όταν $t=x$, $u=0$. Άρα:

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_{[x,0]} f(u)(-du) = \int_{[0,x]} f(u)du.$$

Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\int_0^x f(u)du) / \eta\mu x.$$

Για $x \rightarrow 0$, αριθμητής και παρονομαστής τείνουν στο 0. Εφαρμόζουμε De l' Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\int_0^x f(u)du) / \eta\mu x = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) / \sigma\upsilon\nu x.$$

Από το α ερώτημα, $f(0) = \ln((1+1)/2) = \ln 1 = 0$, ενώ $\sigma\upsilon\nu 0 = 1$.

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) / \sigma\upsilon\nu x = 0/1 = 0.$$

Επομένως το ζητούμενο όριο είναι 0.

γ. Να δειχθεί ότι $h(x)=g(x)$

Δίνονται:

$$h(x) = \int_{-x,x} t^{2005} f(t)dt \text{ και } g(x) = x^{2007}/2007.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που προκύπτει από τον τύπο της f .

Έχουμε:

$$f(t) = \ln((1+e^t)/2).$$

Επίσης:

$$f(-t) = \ln((1+e^{-t})/2).$$

Επειδή $1+e^{-t} = (1+e^t)/e^t$, έχουμε:

$$f(-t) = \ln((1+e^t)/(2e^t)) = \ln((1+e^t)/2) - \ln(e^t).$$

Άρα:

$$f(-t) = f(t) - t.$$

Επομένως:

$$f(t) - f(-t) = t.$$

Τώρα:

$$h(x) = \int_{-x, x} t^{2005} f(t) dt.$$

Για συμμετρικό ολοκλήρωμα ισχύει:

$$\int_{-x, x} \varphi(t) dt = \int_{[0, x]} (\varphi(t) + \varphi(-t)) dt.$$

Θέτουμε $\varphi(t) = t^{2005} f(t)$. Τότε:

$$\varphi(-t) = (-t)^{2005} f(-t) = -t^{2005} f(-t).$$

Άρα:

$$\varphi(t) + \varphi(-t) = t^{2005} f(t) - t^{2005} f(-t) = t^{2005} (f(t) - f(-t)).$$

Επειδή $f(t) - f(-t) = t$, παίρνουμε:

$$\varphi(t) + \varphi(-t) = t^{2005} \cdot t = t^{2006}.$$

Άρα:

$$h(x) = \int_{[0, x]} t^{2006} dt = x^{2007}/2007.$$

Επομένως $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο (0,1)

Η εξίσωση είναι:

$$\int_{-x, x} t^{2005} f(t) dt = 1/2008.$$

Από το γ ερώτημα γνωρίζουμε ότι:

$$\int_{-x, x} t^{2005} f(t) dt = x^{2007}/2007.$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$x^{2007}/2007 = 1/2008.$$

Ισοδύναμα:

$$x^{2007} = 2007/2008.$$

Η συνάρτηση $q(x) = x^{2007}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$, αφού $q'(x) = 2007x^{2006} > 0$ για $x \in (0, 1)$.

Επίσης:

$$0 < 2007/2008 < 1.$$

Άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$x_0^{2007} = 2007/2008.$$

Συγκεκριμένα:

$$x_0 = (2007/2008)^{1/2007}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.