

Αναλυτικές Λύσεις

Μαθηματικά Κατεύθυνσης - Κανονικές 2006

Απολυτήριες Εξετάσεις Γ' Τάξης Ημερησίου Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Απόδειξη μονοτονίας από το πρόσημο της παραγώγου

Έστω x_1, x_2 δύο οποιαδήποτε σημεία του διαστήματος Δ με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Αφού $x_2 - x_1 > 0$:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε $f'(\xi) > 0$, άρα $f(x_2) - f(x_1) > 0$, δηλαδή $f(x_2) > f(x_1)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε $f'(\xi) < 0$, άρα $f(x_2) - f(x_1) < 0$, δηλαδή $f(x_2) < f(x_1)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

A.2 Ορισμός κυρτότητας

Η συνάρτηση f λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο διάστημα Δ , όταν η παράγωγός της f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

Ισοδύναμα, όταν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , αρκεί να ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

B. Σωστό - Λάθος

α. Λάθος. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, όχι γενικά $|z|^2 = z^2$. Παράδειγμα: $z=i$, τότε $|i|^2=1$ ενώ $i^2=-1$.

β. Σωστό. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ για $x \rightarrow x_0$ είναι θετικός αριθμός, τότε από τον ορισμό του ορίου η $f(x)$ παραμένει θετική για x αρκετά κοντά στο x_0 .

γ. Σωστό. Η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα. Η μη σταθερότητα απλώς αποκλείει την εκφυλισμένη περίπτωση ενός μόνο σημείου.

δ. Λάθος. Ισχύει $(3^x)' = 3^x \ln 3$ και όχι $x \cdot 3^{x-1}$. Ο τύπος $x \cdot 3^{x-1}$ είναι η παράγωγος της x^3 .

ε. Σωστό. Είναι ο τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη: $\int \alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]\alpha^\beta - \int \alpha^\beta f'(x)g(x)dx$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται $f(x)=2+(x-2)^2$, με $x \geq 2$.

α. Απόδειξη ότι η f είναι 1-1

Για $x \geq 2$ έχουμε $x-2 \geq 0$. Η παράγωγος είναι:

$$f'(x)=2(x-2).$$

Άρα $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 2$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 2$. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, άρα είναι 1-1.

Εναλλακτικά, αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε:

$$2 + (x_1 - 2)^2 = 2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2.$$

Επειδή $x_1 - 2 \geq 0$ και $x_2 - 2 \geq 0$, παίρνουμε $x_1 - 2 = x_2 - 2$, άρα $x_1 = x_2$. Επομένως η f είναι 1-1.

β. Αντίστροφη συνάρτηση

Επειδή η f είναι 1-1, υπάρχει η αντίστροφη της στο σύνολο τιμών της. Βρίσκουμε πρώτα το σύνολο τιμών:

$$x \geq 2 \Rightarrow (x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2 + (x - 2)^2 \geq 2.$$

Άρα $f([2, +\infty)) = [2, +\infty)$. Θέτουμε $y = f(x)$:

$$y = 2 + (x - 2)^2$$

$$y - 2 = (x - 2)^2$$

Επειδή $x \geq 2$, ισχύει $x - 2 \geq 0$, άρα:

$$x - 2 = \sqrt{y - 2} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y - 2}.$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}, \quad x \geq 2.$$

γ.ι Κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$

Τα κοινά σημεία της C_f με την $y=x$ προκύπτουν από $f(x)=x$:

$$2 + (x - 2)^2 = x.$$

Θέτουμε $t = x - 2$, με $t \geq 0$. Τότε $x = t + 2$ και:

$$2 + t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 = t \Rightarrow t(t - 1) = 0.$$

$$t = 0 \text{ ή } t = 1.$$

Άρα $x = 2$ ή $x = 3$. Τα κοινά σημεία είναι:

$$(2, 2) \text{ και } (3, 3).$$

Επειδή οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, τα ίδια σημεία είναι και τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $y=x$.

γ.ii Εμβαδό χωρίου που περικλείεται από C_f και $C_{f^{-1}}$

Στο διάστημα $[2, 3]$ έχουμε:

$$f(x) = 2 + (x - 2)^2, \quad f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}.$$

Για $2 < x < 3$ θέτουμε $u = x - 2$, οπότε $0 < u < 1$. Τότε $\sqrt{u} > u^2$, άρα $f^{-1}(x) > f(x)$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_2^3 [f^{-1}(x) - f(x)] dx$$

$$E = \int_2^3 [2 + \sqrt{x - 2} - 2 - (x - 2)^2] dx$$

$$E = \int_2^3 [\sqrt{x - 2} - (x - 2)^2] dx.$$

Με αλλαγή μεταβλητής $u = x - 2$, $du = dx$, και όρια $x = 2 \Rightarrow u = 0$, $x = 3 \Rightarrow u = 1$:

$$E = \int_0^1 (\sqrt{u} - u^2) du$$

$$E = \left[\left(\frac{2}{3} \right) u^{3/2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1$$

$$E = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Άρα το εμβαδό είναι $E = \frac{1}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α.ι Απόδειξη ισότητας αποστάσεων

Από $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ έχουμε:

$$z_1 + z_2 = -z_3.$$

Παίρνοντας μέτρα:

$$|z_1 + z_2| = |z_3| = 1.$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$|z_1 + z_2|^2 = 1.$$

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 1.$$

Επειδή $|z_1| = |z_2| = 1$ και $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$, παίρνουμε:

$$1 + 1 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2}.$$

Άρα:

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2 - 2(-\frac{1}{2}) = 3.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, εναλλάσσοντας τους δείκτες, προκύπτει:

$$|z_3 - z_1|^2 = 3 \text{ και } |z_2 - z_3|^2 = 3.$$

Επομένως:

$$|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}.$$

α.ii Απόδειξη ανισοτήτων

Για δύο μιγαδικούς z_1, z_2 με $|z_1| = |z_2| = 1$ ισχύει:

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

Επίσης, επειδή $|z_1 + z_2|^2 \geq 0$:

$$|z_1 + z_2|^2 = 2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq 0$$

$$2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -2$$

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1.$$

Άρα:

$$|z_1 - z_2|^2 = 2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq 2 - 2(-1) = 4.$$

Επομένως αποδείχθηκαν και οι δύο σχέσεις:

$$|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \text{ και } \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1.$$

β. Γεωμετρικός τόπος και είδος τριγώνου

Αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ και ακτίνα 1:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων τους είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Από το α.ι βρήκαμε ότι οι τρεις αποστάσεις των εικόνων είναι ίσες:

$$|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}.$$

Επομένως οι τρεις εικόνες σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο. Ισοδύναμα, αν $z_1 = e^{i\theta}$, τότε οι άλλες δύο εικόνες βρίσκονται στις γωνίες $\theta + 2\pi/3$ και $\theta + 4\pi/3$, με πιθανή αλλαγή σειράς.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται $f(x) = (x+1)/(x-1) - \ln x$.

α. Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών

Για να ορίζεται η f , πρέπει:

- $\ln x$ να ορίζεται, άρα $x > 0$.
- $x-1 \neq 0$, άρα $x \neq 1$.

Άρα:

$$Df = (0,1) \cup (1,+\infty).$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = [(x-1) - (x+1)]/(x-1)^2 - 1/x$$

$$f'(x) = -2/(x-1)^2 - 1/x.$$

Στο πεδίο ορισμού έχουμε $x > 0$ και $(x-1)^2 > 0$, άρα:

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in Df.$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Υπολογίζουμε τα όρια στο $(0,1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1)/(x-1) - \ln x] = -1 + +\infty = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [(x+1)/(x-1) - \ln x] = -\infty - 0 = -\infty.$$

Άρα στο διάστημα $(0,1)$, επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$.

Στο διάστημα $(1,+\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [(x+1)/(x-1) - \ln x] = +\infty - 0 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)/(x-1) - \ln x] = 1 - +\infty = -\infty.$$

Άρα και στο διάστημα $(1,+\infty)$ η f παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Συνεπώς:

$$f(Df) = \mathbb{R}.$$

β. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

Στο $(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, με:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty.$$

Άρα, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Στο $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, με:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$, και λόγω γνήσιας φθίνουσας μονοτονίας είναι μοναδική.

Συνολικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της: μία στο $(0,1)$ και μία στο $(1,+\infty)$.

γ. Κοινή εφαπτομένη των $g(x)=\ln x$ και $h(x)=e^{\lambda x}$

Η εφαπτομένη της $g(x)=\ln x$ στο $A(\alpha, \ln \alpha)$, με $\alpha > 0$, έχει κλίση $g'(\alpha)=1/\alpha$. Άρα η εξίσωσή της είναι:

$$y - \ln \alpha = (1/\alpha)(x - \alpha)$$

$$y = x/\alpha - 1 + \ln \alpha.$$

Η εφαπτομένη της $h(x)=e^{\lambda x}$ στο $B(\beta, e^{\lambda \beta})$, με $\beta \in \mathbb{R}$, έχει κλίση $h'(\beta)=e^{\lambda \beta}$. Άρα:

$$y - e^{\lambda \beta} = e^{\lambda \beta}(x - \beta)$$

$$y = e^{\lambda \beta} x + e^{\lambda \beta}(1 - \beta).$$

Αν οι δύο εφαπτόμενες ταυτίζονται, τότε έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης και ίσες σταθερές τιμές.

Από τις κλίσεις:

$$1/\alpha = e^{\lambda \beta} \Rightarrow \alpha = e^{\lambda \beta} \Rightarrow \beta = -\ln \alpha.$$

Από τους σταθερούς όρους:

$$-1 + \ln \alpha = e^{\lambda \beta}(1 - \beta).$$

Χρησιμοποιώντας $e^{\lambda \beta}=1/\alpha$ και $\beta=-\ln \alpha$:

$$-1 + \ln \alpha = (1/\alpha)(1 + \ln \alpha).$$

Πολλαπλασιάζουμε με α :

$$-\alpha + \alpha \ln \alpha = 1 + \ln \alpha$$

$$\alpha \ln \alpha - \ln \alpha = \alpha + 1$$

$$(\alpha - 1) \ln \alpha = \alpha + 1.$$

Επειδή $\alpha \neq 1$, διαιρούμε με $\alpha - 1$:

$$\ln \alpha = (\alpha + 1)/(\alpha - 1).$$

Άρα:

$$(\alpha + 1)/(\alpha - 1) - \ln \alpha = 0$$

$$f(\alpha) = 0.$$

Επομένως ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ. Ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες

Από το ερώτημα γ, κάθε κοινή εφαπτομένη οδηγεί σε αριθμό $\alpha > 0$ που είναι ρίζα της εξίσωσης $f(\alpha) = 0$.

Από το ερώτημα β, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Αντίστροφα, για κάθε ρίζα α της $f(x) = 0$, θέτουμε $\beta = -\ln \alpha$. Τότε ισχύει $e^\beta = 1/\alpha$ και οι δύο εφαπτόμενες έχουν ίδια κλίση και ίδιο σταθερό όρο, άρα ταυτίζονται.

Συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των $g(x) = \ln x$ και $h(x) = e^x$ έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.