

Αναλυτικές Λύσεις

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης - Κανονικές 2007

ΘΕΜΑ 1

A.1 Απόδειξη ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Θέλουμε να δείξουμε ότι το μέτρο γινομένου δύο μιγαδικών ισούται με το γινόμενο των μέτρων τους.

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$, με $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Άρα:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 \\ &= x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 \\ &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

Επειδή τα μέτρα είναι μη αρνητικοί αριθμοί, παίρνουμε τετραγωνική ρίζα:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

A.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και για κάθε x του κοινού πεδίου ορισμού ισχύει $f(x)=g(x)$. Δηλαδή:

$$D_f = D_g \text{ και } f(x)=g(x), \text{ για κάθε } x \in D_f.$$

A.3 Οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Η ευθεία $y=A$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ όταν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

B. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση	Σχόλιο
α	Λάθος	Αν $f(x)=0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $f(x) \geq 0$ αλλά $\int_a^\beta f(x) dx = 0$, όχι >0 .	Χρειάζεται επιπλέον η f να μη μηδενίζεται παντού.
β	Λάθος	Η $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά $f'(0)=0$.	Η αύξουσα δίνει $f'(x) \geq 0$ όχι αναγκαστικά >0 .
γ	Λάθος	Για τη συνέχεια της $g \circ f$ στο x_0 χρειάζεται η g να είναι συνεχής στο $f(x_0)$, όχι απαραίτητα στο x_0 .	Κλασική παγίδα σύνθεσης.
δ	Σωστό	Από Θεμελιώδες Θεώρημα και κανόνα αλυσίδας: $(\int_a^x g(t) dt)' = g(x)$.	Με την προϋπόθεση ότι τα σύμβολα έχουν νόημα.
ε	Σωστό	Αν $a > 1$, τότε όταν $x \rightarrow -\infty$ έχουμε $a^x = 1/a^{-x}$ και $-x \rightarrow +\infty$, άρα $a^x \rightarrow 0$. Επομένως $a^x \rightarrow 0$.	

ΘΕΜΑ 2

Δεδομένο

$$z = (2 + \alpha i) / (\alpha + 2i), \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

α. Απόδειξη ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1

Αρκεί να δείξουμε ότι $|z|=1$.

$$|z| = |2 + \alpha i| / |\alpha + 2i|$$

$$|2 + \alpha i| = \sqrt{2^2 + \alpha^2} = \sqrt{4 + \alpha^2}$$

$$|\alpha + 2i| = \sqrt{\alpha^2 + 2^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4}$$

Επειδή $4 + \alpha^2 = \alpha^2 + 4$, έχουμε:

$$|z| = \sqrt{4 + \alpha^2} / \sqrt{\alpha^2 + 4} = 1$$

Άρα η εικόνα $M(z)$ έχει απόσταση 1 από την αρχή των αξόνων. Επομένως ανήκει στον κύκλο:

$$x^2 + y^2 = 1$$

β(i). Απόσταση των εικόνων των z_1 και z_2

Για $\alpha=0$:

$$z_1 = (2 + 0i) / (0 + 2i) = 2 / (2i) = 1/i = -i$$

Για $\alpha=2$:

$$z_2 = (2 + 2i) / (2 + 2i) = 1$$

Η απόσταση των εικόνων των z_1 και z_2 είναι $|z_1 - z_2|$:

$$|z_1 - z_2| = |-i - 1| = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Άρα η ζητούμενη απόσταση είναι $\sqrt{2}$.

β(ii). Απόδειξη ότι $(z_1)^2 v = (-z_2)v$ για κάθε φυσικό v

$$z_1 = -i \text{ και } z_2 = 1$$

Υπολογίζουμε:

$$(z_1)^2 v = [(-i)^2]v = (-1)v$$

Επίσης:

$$(-z_2)v = (-1)v$$

Άρα:

$$(z_1)^2 v = (-z_2)v, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}$$

ΘΕΜΑ 3

Δεδομένο

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

$$\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq \kappa\pi + \pi/2, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Η συνθήκη $\theta \neq \kappa\pi + \pi/2$ σημαίνει ότι $\sin\theta \neq 0$, άρα $\eta\mu^2\theta \neq 1$ και επομένως:

$$1 - \eta\mu^2\theta = \sin^2\theta > 0$$

α. Τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο και σημείο καμπής

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

Κρίσιμα σημεία:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$$

Πρόσημο της f' :

Διάστημα	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
f	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα

Άρα στο $x=-1$ η f αλλάζει από αύξουσα σε φθίνουσα, οπότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Στο $x=1$ αλλάζει από φθίνουσα σε αύξουσα, οπότε παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Για την καμπή:

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

Για $x<0$ έχουμε $f''(x)<0$, ενώ για $x>0$ έχουμε $f''(x)>0$. Άρα αλλάζει κυρτότητα στο $x=0$, οπότε η f έχει σημείο καμπής στο $x=0$.

β. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες

Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1)$,
- γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$,
- γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Υπολογίζουμε τις τιμές στα ακρότατα:

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)-2\eta\mu^2\theta = -1+3-2\eta\mu^2\theta = 2-2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$$

$$f(1)=1^3-3\cdot 1-2\eta\mu^2\theta = 1-3-2\eta\mu^2\theta = -2-2\eta\mu^2\theta < 0$$

Επίσης, επειδή η f είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού με θετικό συντελεστή στο x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Άρα:

- Στο $(-\infty, -1)$: από $-\infty$ μέχρι θετική τιμή $f(-1)>0$, υπάρχει μία ρίζα. Λόγω γνησίως αύξησης, είναι μοναδική.
- Στο $(-1, 1)$: από $f(-1)>0$ μέχρι $f(1)<0$, υπάρχει μία ρίζα. Λόγω γνησίως φθίνσης, είναι μοναδική.
- Στο $(1, +\infty)$: από $f(1)<0$ μέχρι $+\infty$, υπάρχει μία ρίζα. Λόγω γνησίως αύξησης, είναι μοναδική.

Συνολικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ. Τα σημεία ακροτάτων και καμπής βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

Από το ερώτημα α έχουμε:

$$x_1=-1, x_2=1, x_3=0$$

Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές της f :

$$f(-1)=2-2\eta\mu^2\theta$$

$$f(1)=-2-2\eta\mu^2\theta$$

$$f(0)=-2\eta\mu^2\theta$$

Για την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$:

$$x=-1 \Rightarrow y=2-2\eta\mu^2\theta = f(-1)$$

$$x=1 \Rightarrow y=-2-2\eta\mu^2\theta = f(1)$$

$$x=0 \Rightarrow y=-2\eta\mu^2\theta = f(0)$$

Άρα τα σημεία $A(-1, f(-1))$, $B(1, f(1))$ και $\Gamma(0, f(0))$ βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

δ. Εμβαδόν χωρίου μεταξύ της f και της ευθείας

Θέτουμε την ευθεία:

$$\varepsilon: y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$$

Η διαφορά συνάρτησης - ευθείας είναι:

$$\begin{aligned} f(x) - y_{\varepsilon} &= x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta - (-2x - 2\eta\mu^2\theta) \\ &= x^3 - x = x(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Τα σημεία τομής είναι $x=-1$, $x=0$, $x=1$. Στο $(-1,0)$ έχουμε $x^3-x>0$, ενώ στο $(0,1)$ έχουμε $x^3-x<0$.

Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{-1}^0 (x^3-x)dx + \int_0^1 (x-x^3)dx$$

Λόγω συμμετρίας ή με πράξεις:

$$\int_{-1}^0 (x^3-x)dx = [x^4/4 - x^2/2]_{-1}^0 = 0 - (1/4 - 1/2) = 1/4$$

$$\int_0^1 (x-x^3)dx = [x^2/2 - x^4/4]_0^1 = 1/2 - 1/4 = 1/4$$

$$E = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=1/2$.

ΘΕΜΑ 4

Δεδομένα

f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, με $f(0)>0$

g συνεχής στο $[0,1]$, με $g(x)>0$ για κάθε $x \in [0,1]$

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt, \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(0)>0$, για κάθε $t \in (0,1]$ ισχύει $f(t)>f(0)>0$. Επίσης $g(t)>0$. Άρα το γινόμενο $f(t)g(t)$ είναι θετικό στο $(0,1]$.

α. Απόδειξη ότι $F(x)>0$ για κάθε $x \in (0,1]$

Για $x \in (0,1]$ έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$$

Στο διάστημα $[0,x]$ η συνάρτηση $f(t)g(t)$ είναι συνεχής και θετική. Επομένως το ολοκλήρωμά της σε διάστημα θετικού μήκους είναι θετικό:

$$F(x)>0$$

β. Απόδειξη ότι $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε $x \in (0,1]$

Ξεκινάμε από τη διαφορά που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι θετική:

$$\begin{aligned} f(x)G(x) - F(x) &= f(x) \int_0^x g(t)dt - \int_0^x f(t)g(t)dt \\ &= \int_0^x f(x)g(t)dt - \int_0^x f(t)g(t)dt \\ &= \int_0^x [f(x) - f(t)]g(t)dt \end{aligned}$$

Για κάθε $t \in [0,x)$ ισχύει $t < x$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα:

$$f(t) < f(x) \Rightarrow f(x) - f(t) > 0$$

Επίσης $g(t)>0$. Άρα το ολοκλήρωμα θετικής συνάρτησης σε διάστημα θετικού μήκους είναι θετικό:

$$\int_0^x [f(x)-f(t)]g(t)dt > 0$$

Επομένως:

$$f(x)G(x)-F(x)>0 \Leftrightarrow f(x)G(x)>F(x)$$

γ. Απόδειξη ότι $F(x)/G(x) \leq F(1)/G(1)$

Επειδή $g(t)>0$, για κάθε $x \in (0,1]$ έχουμε:

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt > 0$$

Ορίζουμε:

$$H(x)=F(x)/G(x), x \in (0,1]$$

Θα δείξουμε ότι η H είναι γνησίως αύξουσα. Παραγωγίζουμε:

$$H'(x) = [F'(x)G(x)-F(x)G'(x)] / [G(x)]^2$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα:

$$F'(x)=f(x)g(x), \quad G'(x)=g(x)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} H'(x) &= [f(x)g(x)G(x)-F(x)g(x)]/[G(x)]^2 \\ &= g(x)[f(x)G(x)-F(x)]/[G(x)]^2 \end{aligned}$$

Από το ερώτημα β έχουμε $f(x)G(x)-F(x)>0$. Επίσης $g(x)>0$ και $[G(x)]^2>0$. Άρα:

$$H'(x)>0$$

Άρα η H είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$. Επομένως, για κάθε $x \in (0,1]$:

$$H(x) \leq H(1)$$

$$F(x)/G(x) \leq F(1)/G(1)$$

δ. Υπολογισμός ορίου

Το όριο είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(\int_0^x f(t)g(t)dt)(\int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt)] / [(\int_0^x g(t)dt) \cdot x^5]$$

Το γράφουμε ως γινόμενο δύο παραγόντων:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} [F(x)/G(x)] \cdot [\int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt / x^5]$$

Για τον πρώτο παράγοντα, επειδή $F(0)=G(0)=0$, εφαρμόζουμε De l'Hospital ή γνωστό θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωμάτων:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)/G(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x)/G'(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)g(x)]/[g(x)] = f(0) \end{aligned}$$

Για τον δεύτερο παράγοντα χρησιμοποιούμε ότι $\eta \mu t/t \rightarrow 1$ όταν $t \rightarrow 0$. Άρα $\eta \mu^2 t/t^2 \rightarrow 1$.

$$\int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt / x^5 = [\int_0^{x^2} t^2 \cdot (\eta \mu^2 t/t^2) dt] / x^5$$

Επειδή $\eta \mu^2 t/t^2 \rightarrow 1$, ασυμπτωτικά:

$$\int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt \sim \int_0^{x^2} t^2 dt = [t^3/3]_0^{x^2} = x^6/3$$

$$\text{Άρα } \int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt / x^5 \sim (x^6/3)/x^5 = x/3 \rightarrow 0$$

Επομένως:

$$L = f(0) \cdot 0 = 0$$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι 0.