

# Αναλυτικές λύσεις Μαθηματικών Κατεύθυνσης 2008

Απολυτήριες Εξετάσεις Γ' Λυκείου – Θετική & Τεχνολογική Κατεύθυνση

## ΘΕΜΑ 1

### A1. Απόδειξη ότι $(\ln|x|)' = 1/x, x \in \mathbb{R}^*$

Στην εκφώνηση εμφανίζεται η συνάρτηση  $\ln|x|$  στο  $\mathbb{R}^*$ . Πράγματι, η  $\ln x$  ορίζεται μόνο για  $x>0$ , ενώ η  $\ln|x|$  ορίζεται για κάθε  $x \neq 0$ .

Για  $x>0$  έχουμε  $|x|=x$ , άρα:

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$$

Για  $x<0$  έχουμε  $|x|=-x$ , άρα  $\ln|x|=\ln(-x)$ . Με τον κανόνα αλυσίδας:

$$(\ln(-x))' = 1/(-x) \cdot (-1) = 1/x$$

Επομένως, και στα δύο διαστήματα  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ , η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = 1/x, x \in \mathbb{R}^*$$

### A2. Συνέχεια σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$

Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , όταν:

- είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x_0$  του  $(\alpha, \beta)$ ,
- είναι συνεχής από δεξιά στο  $\alpha$ , δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ ,
- είναι συνεχής από αριστερά στο  $\beta$ , δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ .

### B. Σωστό / Λάθος

| Πρόταση | Απάντηση | Αιτιολόγηση                                                                                                                                                              |
|---------|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| α       | Σωστό    | Για 1-1 συνάρτηση ισχύουν οι βασικές σχέσεις σύνθεσης $f^{-1}(f(x))=x$ για $x \in A$ και $f(f^{-1}(y))=y$ για $y \in f(A)$ .                                             |
| β       | Σωστό    | Αν η συνεχής $f$ άλλαζε πρόσημο χωρίς ενδιάμεση ρίζα, από Bolzano θα υπήρχε νέα ρίζα. Άρα ανάμεσα σε διαδοχικές ρίζες διατηρεί πρόσημο.                                  |
| γ       | Λάθος    | Για $\Delta < 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές δεν έχει πραγματικές ρίζες, αλλά έχει δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες.                                 |
| δ       | Λάθος    | Κοίλα προς τα άνω σημαίνει ότι η $f'$ είναι αύξουσα. Αν υπάρχει $f''$ , αρκεί $f''(x) \geq 0$ , όχι κατ' ανάγκη $> 0$ . Παράδειγμα: $f(x)=x^4$ έχει $f''(0)=0$ .         |
| ε       | Σωστό    | Ισχύει η προσθετικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος: $\int \alpha^\beta f = \int \alpha^\gamma f + \int \gamma^\beta f$ , για $\alpha, \beta, \gamma$ στο ίδιο διάστημα. |

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι σχέσεις:

$$|z - (2+2i)| = 6 \text{ και } |w - (1+i)| = |w - (3-i)|$$

Θέτουμε  $z=x+yi$  και  $w=X+Yi$ .

### α. Γεωμετρικός τύπος των εικόνων του $z$

Η σχέση  $|z-(2+2i)|=6$  σημαίνει ότι η απόσταση της εικόνας  $M(x,y)$  του  $z$  από το σημείο  $C(2,2)$  είναι 6.

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 36$$

Άρα ο γεωμετρικός τύπος είναι κύκλος με κέντρο  $C(2,2)$  και ακτίνα  $\rho=6$ .

### β. Γεωμετρικός τύπος των εικόνων του $w$

Η σχέση  $|w-(1+i)|=|w-(3-i)|$  σημαίνει ότι η εικόνα  $P(X,Y)$  του  $w$  ισαπέχει από τα σημεία  $A(1,1)$  και  $B(3,-1)$ . Άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του  $AB$ .

$$\begin{aligned}(X-1)^2 + (Y-1)^2 &= (X-3)^2 + (Y+1)^2 \\ X^2 - 2X + 1 + Y^2 - 2Y + 1 &= X^2 - 6X + 9 + Y^2 + 2Y + 1 \\ 4X - 4Y - 8 &= 0 \Leftrightarrow X - Y - 2 = 0\end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τύπος των εικόνων του  $w$  είναι η ευθεία:

$$X - Y - 2 = 0 \text{ ή } Y = X - 2$$

### γ. Ελάχιστη τιμή του $|w|$

Το  $|w|$  είναι η απόσταση της εικόνας  $P$  του  $w$  από την αρχή  $O(0,0)$ . Εφόσον το  $P$  κινείται στην ευθεία  $L: X-Y-2=0$ , η ελάχιστη απόσταση είναι η απόσταση του  $O$  από την  $L$ .

$$d(O,L) = |0-0-2|/\sqrt{(1^2+(-1)^2)} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Άρα:

$$\min |w| = \sqrt{2}$$

### δ. Ελάχιστη τιμή του $|w-z|$

Το  $|w-z|$  είναι η απόσταση των εικόνων των  $z$  και  $w$ . Η εικόνα του  $z$  κινείται στον κύκλο  $C: (x-2)^2+(y-2)^2=36$  και η εικόνα του  $w$  στην ευθεία  $L: x-y-2=0$ .

Ελέγχουμε αν η ευθεία τέμνει τον κύκλο. Η απόσταση του κέντρου  $C(2,2)$  από την  $L$  είναι:

$$d(C,L) = |2-2-2|/\sqrt{2} = \sqrt{2} < 6$$

Άρα η ευθεία τέμνει τον κύκλο. Υπάρχουν κοινά σημεία, οπότε μπορούμε να πάρουμε  $z=w$  σε κοινό σημείο.

$$\min |w-z| = 0$$

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \{ x \ln x, x > 0 ; 0, x = 0 \}$$

### α. Συνέχεια στο 0

Για να είναι συνεχής στο 0 πρέπει να ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

Θέτουμε  $x=1/t$ . Τότε, όταν  $x \rightarrow 0^+$ ,  $t \rightarrow +\infty$  και:

$$x \ln x = (1/t) \ln(1/t) = -(\ln t)/t$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -(\ln t)/t = 0$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 = f(0)$ . Επομένως η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

## β. Μονοτονία και σύνολο τιμών

Για  $x > 0$ :

$$f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$$

Λύνουμε  $f'(x)=0$ :

$$\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

Πρόσημο της  $f'$ :

- Αν  $0 < x < e^{-1}$ , τότε  $\ln x < -1$ , άρα  $f'(x) < 0$ .
- Αν  $x > e^{-1}$ , τότε  $\ln x > -1$ , άρα  $f'(x) > 0$ .

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, e^{-1}]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[e^{-1}, +\infty)$ . Το ελάχιστο είναι:

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = -1/e$$

Επίσης  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ . Άρα το σύνολο τιμών είναι:

$$f((0, +\infty)) = [-1/e, +\infty)$$

Αν συνυπολογιστεί και το  $x=0$ , το 0 ήδη ανήκει στο παραπάνω διάστημα, άρα το σύνολο τιμών της  $f$  στο  $[0, +\infty)$  παραμένει  $[-1/e, +\infty)$ .

## γ. Πλήθος θετικών ριζών της εξίσωσης $x^\alpha = e^x$

Για  $x > 0$  παίρνουμε λογαρίθμους:

$$x^\alpha = e^x \Leftrightarrow \alpha \ln x = x$$

Αν  $\alpha=0$ , τότε έχουμε  $1=e^x$ , που δεν έχει θετική λύση. Για  $\alpha \neq 0$ :

$$\alpha \ln x = x \Leftrightarrow (\ln x)/x = 1/\alpha$$

Μελετάμε τη συνάρτηση  $\phi(x) = \ln x/x$ ,  $x > 0$ .

$$\phi'(x) = (1 - \ln x)/x^2$$

Άρα η  $\phi$  είναι αύξουσα στο  $(0, e]$  και φθίνουσα στο  $[e, +\infty)$ . Επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = -\infty, \quad \phi(e) = 1/e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0^+$$

Συγκρίνουμε την οριζόντια ευθεία  $y=1/\alpha$  με τη γραφική της  $\phi$ :

- Αν  $\alpha < 0$ , τότε  $1/\alpha < 0$ . Υπάρχει ακριβώς μία θετική ρίζα, στο διάστημα  $(0, 1)$ .
- Αν  $\alpha = 0$ , δεν υπάρχει θετική ρίζα.
- Αν  $0 < \alpha < e$ , τότε  $1/\alpha > 1/e$ , άρα δεν υπάρχει θετική ρίζα.
- Αν  $\alpha = e$ , τότε  $1/\alpha = 1/e$ , άρα υπάρχει μία θετική ρίζα, η  $x=e$ .
- Αν  $\alpha > e$ , τότε  $0 < 1/\alpha < 1/e$ , άρα υπάρχουν δύο θετικές ρίζες.

#### δ. Απόδειξη της ανισότητας $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ , $x > 0$

Για  $x > 0$  εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στη  $f$  στο διάστημα  $[x, x+1]$ . Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x, x+1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, x+1)$ . Άρα υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$  τέτοιο ώστε:

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \cdot [(x+1) - x] = f'(\xi)$$

Επειδή  $f'(t) = \ln t + 1$  και  $f''(t) = 1/t > 0$  για  $t > 0$ , η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . Αφού  $\xi < x+1$ , έχουμε:

$$f'(\xi) < f'(x+1)$$

Επομένως:

$$f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$$

δηλαδή:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x), \text{ για κάθε } x > 0$$

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f$  στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot \int_0^2 f(t) dt - 45$$

#### α. Απόδειξη ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

Θέτουμε:

$$A = \int_0^2 f(t) dt$$

Τότε η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$f(x) = A(10x^3 + 3x) - 45$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη από 0 έως 2:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [A(10x^3 + 3x) - 45] dx$$

$$A = A \int_0^2 (10x^3 + 3x) dx - \int_0^2 45 dx$$

$$A = A \left[ \frac{10x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^2 - 90$$

$$A = A(40 + 6) - 90 = 46A - 90$$

$$45A = 90 \Leftrightarrow A = 2$$

Άρα:

$$f(x) = 2(10x^3 + 3x) - 45 = 20x^3 + 6x - 45$$

#### β. Απόδειξη του ορίου για τη $g''$

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [g'(x) - g'(x-h)]/h$$

Θέτουμε  $u = -h$ . Τότε, όταν  $h \rightarrow 0$ , έχουμε  $u \rightarrow 0$  και  $x-h = x+u$ . Επομένως:

$$[g'(x) - g'(x-h)]/h = [g'(x) - g'(x+u)]/(-u) = [g'(x+u) - g'(x)]/u$$

Άρα:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [g'(x) - g'(x-h)]/h = \lim_{u \rightarrow 0} [g'(x+u) - g'(x)]/u = g''(x)$$

**γ.ι. Απόδειξη ότι  $g(x)=x^5+x^3+x+1$**

Δίνεται ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)]/h^2 = f(x) + 45$$

Το αριστερό μέλος είναι ο γνωστός συμμετρικός τύπος δεύτερης παραγώγου, άρα ισούται με  $g''(x)$ . Επομένως:

$$g''(x) = f(x) + 45$$

Από το ερώτημα (α),  $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$ . Άρα:

$$g''(x) = 20x^3 + 6x$$

Ολοκληρώνουμε:

$$g'(x) = \int (20x^3 + 6x) dx = 5x^4 + 3x^2 + C_1$$

Επειδή  $g'(0) = 1$ , έχουμε  $C_1 = 1$ . Άρα:

$$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$$

Ολοκληρώνουμε ξανά:

$$g(x) = \int (5x^4 + 3x^2 + 1) dx = x^5 + x^3 + x + C_2$$

Επειδή  $g(0) = 1$ , έχουμε  $C_2 = 1$ . Άρα:

$$g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$$

**γ.ιι. Απόδειξη ότι η  $g$  είναι 1-1**

Έχουμε:

$$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $x^2 \geq 0$  και  $x^4 \geq 0$ , άρα:

$$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

Επομένως η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1. Άρα η  $g$  είναι 1-1.