

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης - Κανονικές 2009

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απόδειξη

Έστω x_1, x_2 δύο σημεία του διαστήματος Δ , με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο Δ , είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$. Επίσης, επειδή $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) .

Άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_1, x_2]$. Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Όμως $f'(\xi)=0$, επομένως:

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$$

Άρα: Η f παίρνει την ίδια τιμή σε οποιαδήποτε δύο σημεία του Δ , άρα είναι σταθερή σε όλο το Δ .

Β. Ορισμός παραγωγισιμότητας

Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)]/h$$

Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Γ. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Σύντομη αιτιολόγηση
α	Σωστό	Ισχύει η ιδιότητα $ z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 $.
β	Σωστό	Αυτός είναι ο ορισμός του ολικού ελαχίστου.
γ	Λάθος	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)/x = 0$, όχι 1.
δ	Λάθος	Η συνέχεια δεν συνεπάγεται παραγωγισιμότητα. Π.χ. $f(x)= x $ στο 0.
ε	Λάθος	Αφού $f(x) < 0$, το εμβαδόν είναι $E(\Omega) = -\int_a^b f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται:

$$z = (2\lambda+1) + (2\lambda-1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Α.α. Γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z

Αν η εικόνα του z είναι το σημείο $M(x,y)$, τότε:

$$x = 2\lambda+1, \quad y = 2\lambda-1$$

Αφαιρούμε τις δύο σχέσεις:

$$x - y = (2\lambda+1) - (2\lambda-1) = 2$$

Αρα: Οι εικόνες των z βρίσκονται στην ευθεία $x-y=2$, δηλαδή $y=x-2$.

Α.β. Μιγαδικός με ελάχιστο μέτρο

Το τετράγωνο του μέτρου είναι:

$$|z|^2 = (2\lambda+1)^2 + (2\lambda-1)^2$$

$$|z|^2 = (4\lambda^2+4\lambda+1) + (4\lambda^2-4\lambda+1) = 8\lambda^2+2$$

Η ποσότητα $8\lambda^2+2$ γίνεται ελάχιστη όταν $\lambda=0$.

$$\lambda=0 \Rightarrow z_0 = 1 - i$$

Αρα: Ο μιγαδικός με το μικρότερο δυνατό μέτρο είναι $z_0=1-i$.

Β. Εύρεση των μιγαδικών w

Η εξίσωση είναι:

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

Θέτουμε $w=x+yi$, με $x,y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$|w|^2 = x^2 + y^2, \quad \bar{w} = x - yi, \quad z_0 = 1 - i$$

Άρα:

$$x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i$$

Εξισώνουμε πραγματικά και φανταστικά μέρη:

$$-y = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$x^2 + y^2 + x - 12 = 1$$

Με $y=1$:

$$x^2 + 1 + x - 12 = 1 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ ή } x = 3$$

Αρα: Οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι $w=3+i$ και $w=-4+i$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται:

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1$$

Α. Απόδειξη ότι $\alpha=e$

Ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(0) = \alpha^0 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Άρα στο $x=0$ η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$, πρέπει να ισχύει $f'(0)=0$.

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - 1/(x+1)$$

$$f'(0) = \ln \alpha - 1$$

Επομένως:

$$\ln \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \ln \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = e$$

Αρα: $\alpha=e$.

B. Για $\alpha=e$

$$f(x)=e^x - \ln(x+1), \quad x>-1$$

B.α. Κυρτότητα

Υπολογίζουμε δεύτερη παράγωγο:

$$f'(x)=e^x - 1/(x+1)$$

$$f''(x)=e^x + 1/(x+1)^2$$

Για κάθε $x>-1$ έχουμε $e^x>0$ και $1/(x+1)^2>0$. Άρα:

$$f''(x)>0, \quad \text{για κάθε } x>-1$$

Άρα: Η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

B.β. Μονοτονία

Θέλουμε το πρόσημο της $f'(x)$. Γράφουμε:

$$f'(x)=e^x - 1/(x+1) = [e^x(x+1) - 1]/(x+1)$$

Επειδή $x>-1$, έχουμε $x+1>0$. Άρα το πρόσημο της f' είναι το πρόσημο της ποσότητας:

$$\varphi(x)=e^x(x+1) - 1$$

Θέτουμε $\psi(x)=e^x(x+1)$. Τότε:

$$\psi'(x)=e^x(x+1)+e^x=e^x(x+2)$$

Για $x>-1$ ισχύει $x+2>1>0$, άρα $\psi'(x)>0$. Επομένως η ψ είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον:

$$\psi(0)=e^0(0+1)=1$$

Άρα:

- αν $-1<x<0$, τότε $\psi(x)<1 \Rightarrow \varphi(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0$,
- αν $x>0$, τότε $\psi(x)>1 \Rightarrow \varphi(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$.

Άρα: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

B.γ. Ύπαρξη ρίζας στο $(1, 2)$

Από το προηγούμενο ερώτημα η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$. Επειδή $f(0)=1$, για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ισχύει:

$$f(x)>1$$

Άρα, για $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, έχουμε:

$$A=f(\beta)-1>0, \quad B=f(\gamma)-1>0$$

Η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$A/(x-1) + B/(x-2) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=A/(x-1)+B/(x-2), \quad x \in (1, 2)$$

Η g είναι συνεχής στο $(1, 2)$. Επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)=-\infty$$

Άρα η g αλλάζει πρόσημο μέσα στο $(1, 2)$. Με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

Μάλιστα, αν λυθεί αλγεβρικά:

$$A/(x-1)+B/(x-2)=0$$

$$A(x-2)+B(x-1)=0$$

$$(A+B)x - (2A+B)=0$$

$$x = (2A+B)/(A+B)$$

Επειδή $A, B > 0$:

$$1 < (2A+B)/(A+B) < 2$$

Άρα: Η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνεχής f στο $[0, 2]$ και:

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζονται:

$$H(x) = \int_0^x t f(t)dt, \quad x \in [0, 2]$$

$$G(x) = H(x)/x - \int_0^x f(t)dt + 3, \quad x \in (0, 2]$$

$$G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} [1 - \sqrt{1-t^2}]/t^2$$

α. Συνέχεια της G στο $[0, 2]$

Για $x \in (0, 2]$, οι συναρτήσεις $H(x)$, $H(x)/x$ και $\int_0^x f(t)dt$ είναι συνεχείς, άρα η G είναι συνεχής στο $(0, 2]$. Μένει να εξετάσουμε το $x=0$.

Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή $G(0)$:

$$[1 - \sqrt{1-t^2}]/t^2 = [1 - (1-t^2)]/[t^2(1 + \sqrt{1-t^2})]$$

$$= 1/[1 + \sqrt{1-t^2}] \rightarrow 1/2$$

$$G(0) = 6 \cdot 1/2 = 3$$

Τώρα βρίσκουμε το όριο της $G(x)$, όταν $x \rightarrow 0^+$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(t)| \leq M$.

$$|H(x)/x| = |(1/x) \int_0^x t f(t)dt| \leq (1/x) \int_0^x t M dt = Mx/2 \rightarrow 0$$

Επίσης:

$$\int_0^x f(t)dt \rightarrow 0$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0 - 0 + 3 = 3 = G(0)$$

Άρα: Η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

β. Παραγωγισιμότητα και τύπος της G'

Για $x \in (0, 2)$, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

$$H'(x) = x f(x)$$

$$(\int_0^x f(t)dt)' = f(x)$$

Άρα:

$$G'(x) = (H(x)/x)' - f(x)$$

$$G'(x) = [xH'(x) - H(x)]/x^2 - f(x)$$

$$G'(x) = [x \cdot x f(x) - H(x)]/x^2 - f(x)$$

$$G'(x) = f(x) - H(x)/x^2 - f(x)$$

$$G'(x) = -H(x)/x^2$$

Άρα: Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και $G'(x) = -H(x)/x^2$, για $0 < x < 2$.

γ. Ύπαρξη $\alpha \in (0,2)$ με $H(\alpha)=0$

Από τη δοσμένη σχέση:

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0$$

$$\int_0^2 t f(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt = 0$$

$$H(2)=2 \int_0^2 f(t)dt$$

Άρα:

$$G(2)=H(2)/2 - \int_0^2 f(t)dt + 3$$

$$G(2)=[2 \int_0^2 f(t)dt]/2 - \int_0^2 f(t)dt + 3 = 3$$

Στο α ερώτημα βρήκαμε ότι $G(0)=3$. Άρα:

$$G(0)=G(2)$$

Η G είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, επομένως από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\alpha \in (0,2)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\alpha)=0$$

Με βάση τον τύπο του β ερωτήματος:

$$G'(\alpha)=-H(\alpha)/\alpha^2=0$$

Άρα: Επειδή $\alpha^2 > 0$, προκύπτει $H(\alpha)=0$.

δ. Ύπαρξη $\xi \in (0,\alpha)$

Από το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει $\alpha \in (0,2)$ με $H(\alpha)=0$. Τότε:

$$G(\alpha)=H(\alpha)/\alpha - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 = 3 - \int_0^\alpha f(t)dt$$

Επίσης $G(0)=3$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στη G στο $[0,\alpha]$. Υπάρχει $\xi \in (0,\alpha)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\xi) = [G(\alpha)-G(0)]/(\alpha-0)$$

$$G'(\xi) = [3 - \int_0^\alpha f(t)dt - 3]/\alpha$$

$$G'(\xi) = -(1/\alpha) \int_0^\alpha f(t)dt$$

Από το β ερώτημα όμως:

$$G'(\xi)=-H(\xi)/\xi^2$$

Άρα:

$$-H(\xi)/\xi^2 = -(1/\alpha) \int_0^\alpha f(t)dt$$

$$H(\xi)/\xi^2 = (1/\alpha) \int_0^\alpha f(t)dt$$

Επειδή $H(\xi)=\int_0^\xi t f(t)dt$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$H(\xi)=\int_0^\xi t f(t)dt$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\alpha \xi^2$:

$$\alpha \int_0^\xi t f(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

Άρα: Υπάρχει $\xi \in (0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $\alpha \int_0^\xi t f(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$.

Τέλος λύσεων