

Αναλυτικές λύσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου - Κανονικές 2010

ΘΕΜΑ Α

A1. Παράγουσες συνάρτησης

Έστω ότι F είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα Δ . Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$F'(x) = f(x)$$

Για κάθε σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $G(x) = F(x) + c$. Τότε:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Άρα κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$ είναι επίσης παράγουσα της f στο Δ .

Αν τώρα G είναι οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο Δ , τότε:

$$G'(x) = f(x) \text{ και } F'(x) = f(x)$$

Άρα:

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Επειδή η παράγωγος της $G - F$ είναι μηδενική σε διάστημα, η $G - F$ είναι σταθερή στο Δ . Επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$G(x) - F(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$$

Άρα όλες και μόνο οι παράγουσες της f στο Δ είναι οι συναρτήσεις $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

A2. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια της f , καθώς το x τείνει στο x_0 από αριστερά ή από δεξιά, είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

A3. Κοίλη συνάρτηση

Μία συνάρτηση f , συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, ή είναι κοίλη στο Δ , όταν η παράγωγός της f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Αν επιπλέον υπάρχει δεύτερη παράγωγος, πρακτικό κριτήριο είναι:

$$f''(x) < 0 \text{ στο εσωτερικό του } \Delta$$

A4. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Σωστό	Η διανυσματική ακτίνα του $z_1 - z_2$ είναι πράγματι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων των z_1 και z_2 .
β	Σωστό	Μία γνησίως αύξουσα παραγωγίσιμη συνάρτηση δεν έχει υποχρεωτικά θετική παράγωγο

		παντού. Παράδειγμα: $f(x)=x^3$, όπου $f'(0)=0$.
γ	Λάθος	Για γνησίως φθίνουσα συνεχή συνάρτηση στο (α, β) , με $A=\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B=\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$, ισχύει $A > B$ και το σύνολο τιμών είναι (B, A) , όχι (A, B) .
δ	Λάθος	Ισχύει $(\sin x)' = \cos x$.
ε	Σωστό	Αν το όριο της f στο x_0 είναι αρνητικός αριθμός, τότε η f παίρνει αρνητικές τιμές κοντά στο x_0 .

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ρίζες της εξίσωσης

Δίνεται η εξίσωση:

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

Άρα:

$$z = (2 \pm \sqrt{-4})/2 = (2 \pm 2i)/2 = 1 \pm i$$

Επομένως οι ρίζες είναι:

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 - i$$

Β2. Απόδειξη ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$

Γράφουμε τις ρίζες σε τριγωνομετρική μορφή:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \cdot (\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$$

Με τον τύπο του De Moivre:

$$z_1^{2010} = (\sqrt{2})^{2010} [\cos(2010\pi/4) + i \sin(2010\pi/4)]$$

$$z_2^{2010} = (\sqrt{2})^{2010} [\cos(-2010\pi/4) + i \sin(-2010\pi/4)]$$

Προσθέτοντας, τα φανταστικά μέρη αλληλοαναιρούνται:

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 2(\sqrt{2})^{2010} \cos(2010\pi/4)$$

Επειδή:

$$2010\pi/4 = 502\pi + \pi/2$$

έχουμε $\cos(502\pi + \pi/2) = 0$. Άρα:

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

B3. Γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w

Από το B1:

$$z_1 - z_2 = (1+i) - (1-i) = 2i \Rightarrow |z_1 - z_2| = 2$$

Η σχέση του ερωτήματος γίνεται:

$$|w - 4 + 3i| = 2$$

Αν $w = x + yi$, τότε:

$$w - 4 + 3i = (x - 4) + (y + 3)i$$

Άρα:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} = 2$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K(4, -3)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

B4. Απόδειξη ότι $3 \leq |w| \leq 7$

Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας M του w από την αρχή $O(0,0)$. Από το B3, το M κινείται στον κύκλο με κέντρο $K(4, -3)$ και ακτίνα 2.

Η απόσταση του κέντρου K από την αρχή O είναι:

$$OK = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Για κάθε σημείο M του κύκλου ισχύει από την τριγωνική ανισότητα:

$$OK - KM \leq OM \leq OK + KM$$

$$5 - 2 \leq |w| \leq 5 + 2$$

Επομένως:

$$3 \leq |w| \leq 7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μονοτονία της f

Δίνεται:

$$f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και:

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) + 2x}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + 1 > 0$. Επίσης:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Λύση της εξίσωσης

Η εξίσωση γράφεται:

$$4x + \ln(((3x-2)^2+1)/(x^2+1)) = 4$$

Μεταφέρουμε το 4 στο αριστερό μέλος:

$$4x-4 + \ln(((3x-2)^2+1)/(x^2+1)) = 0$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f(3x-2)=2(3x-2)+\ln((3x-2)^2+1)=6x-4+\ln((3x-2)^2+1)$$

$$f(x)=2x+\ln(x^2+1)$$

Άρα:

$$f(3x-2)-f(x)=4x-4+\ln(((3x-2)^2+1)/(x^2+1))$$

Η δοθείσα εξίσωση ισοδυναμεί με:

$$f(3x-2)-f(x)=0 \Rightarrow f(3x-2)=f(x)$$

Από το Γ1 η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι ένα προς ένα. Επομένως:

$$3x-2=x \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

Έλεγχος: για $x=1$ το αριστερό μέλος είναι $4+\ln(2/2)=4$. Άρα η μοναδική λύση είναι:

$$x=1$$

Γ3. Σημεία καμπής και τομή εφαπτομένων

Από το Γ1:

$$f'(x)=2 + 2x/(x^2+1)$$

Άρα:

$$f''(x)= 2(1-x^2)/(x^2+1)^2$$

Ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός, άρα το πρόσημο της f'' καθορίζεται από το $1-x^2$.

$$f''(x)>0 \text{ για } -1<x<1$$

$$f''(x)<0 \text{ για } x<-1 \text{ ή } x>1$$

Στα $x=-1$ και $x=1$ η f'' μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο. Επομένως η f έχει δύο σημεία καμπής:

$$A(-1, f(-1)) = A(-1, -2+\ln 2)$$

$$B(1, f(1)) = B(1, 2+\ln 2)$$

Υπολογίζουμε τις κλίσεις των εφαπτομένων:

$$f'(-1)=2+2(-1)/2=1$$

$$f'(1)=2+2(1)/2=3$$

Εφαπτομένη στο A:

$$y-(-2+\ln 2)=1(x+1) \Rightarrow y=x-1+\ln 2$$

Εφαπτομένη στο B:

$$y-(2+\ln 2)=3(x-1) \Rightarrow y=3x-1+\ln 2$$

Για την τομή τους λύνουμε:

$$x-1+\ln 2 = 3x-1+\ln 2$$

$$2x=0 \Rightarrow x=0$$

Για $x=0$ βρίσκουμε $y=-1+\ln 2$. Άρα οι εφαπτόμενες τέμνονται στο σημείο:

$$\Sigma(0, -1+\ln 2)$$

Το σημείο αυτό ανήκει στον άξονα $\psi\psi$, επειδή έχει τετμημένη 0.

Γ4. Υπολογισμός ολοκληρώματος

Θέλουμε:

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

Αντικαθιστούμε την f :

$$I = \int_{-1}^1 x [2x + \ln(x^2 + 1)] dx$$

$$I = \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx$$

Η συνάρτηση $x \ln(x^2 + 1)$ είναι περιττή, γιατί x είναι περιττή και $\ln(x^2 + 1)$ άρτια. Άρα το ολοκλήρωμά της στο συμμετρικό διάστημα $[-1, 1]$ είναι 0.

Επομένως:

$$I = \int_{-1}^1 2x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

$$I = 2 \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Άρα:

$$I = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγισιμότητα και τύπος της παραγώγου

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq x$ και:

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Επειδή f είναι συνεχής και $f(t) - t \neq 0$, η συνάρτηση

$$\varphi(t) = \frac{t}{f(t) - t}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα το ολοκλήρωμα με μεταβλητό άνω άκρο είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη:

$$(f(x) - x)' = \left[3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt \right]'$$

$$f'(x) - 1 = x / (f(x) - x)$$

Άρα:

$$f'(x) = 1 + x / (f(x) - x)$$

$$f'(x) = [f(x) - x + x] / (f(x) - x) = f(x) / (f(x) - x)$$

Επομένως:

$$f'(x) = f(x) / (f(x) - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Η g είναι σταθερή

Ορίζεται:

$$g(x) = f^2(x) - 2xf(x)$$

Παραγωγίζουμε:

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x)$$

$$g'(x) = 2f'(x)[f(x) - x] - 2f(x)$$

Από το Δ1 έχουμε:

$$f'(x)[f(x) - x] = f(x)$$

Άρα:

$$g'(x) = 2f(x) - 2f(x) = 0$$

Επομένως η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Προσδιορισμός της f

Από τη δοθείσα σχέση για $x=0$ παίρνουμε:

$$f(0) - 0 = 3 + \int_0^0 t/(f(t) - t) dt$$

$$f(0) = 3$$

Επειδή η g είναι σταθερή, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = g(0)$$

Υπολογίζουμε:

$$g(0) = f^2(0) - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = 3^2 = 9$$

Άρα:

$$f^2(x) - 2xf(x) = 9$$

Συμπληρώνουμε τετράγωνο:

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9$$

$$(f(x) - x)^2 = x^2 + 9$$

Άρα:

$$f(x) - x = \pm \sqrt{x^2 + 9}$$

Η συνάρτηση $f(x) - x$ είναι συνεχής και από τη δοθείσα σχέση στο $x=0$ έχει τιμή $3 > 0$. Επίσης δεν μηδενίζεται, αφού $f(x) \neq x$. Άρα δεν μπορεί να αλλάξει πρόσημο. Συνεπώς παίρνουμε το θετικό πρόσημο:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9}$$

Επομένως:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ4. Απόδειξη ανισότητας ολοκληρωμάτων

Από το Δ3:

$$f(x)=x+\sqrt{(x^2+9)}$$

Επειδή $\sqrt{(x^2+9)}>|x|$, έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης από το Δ1:

$$f'(x)=f(x)/(f(x)-x)$$

Όμως $f(x)>0$ και $f(x)-x=\sqrt{(x^2+9)}>0$. Άρα:

$$f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $t\in[x,x+1]$ ισχύει $t<t+1$, οπότε λόγω γνησίας αύξησης:

$$f(t)<f(t+1)$$

Ολοκληρώνουμε στο $[x,x+1]$:

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_x^{x+1} f(t+1)dt$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε $u=t+1$. Τότε όταν $t=x$, $u=x+1$ και όταν $t=x+1$, $u=x+2$. Άρα:

$$\int_x^{x+1} f(t+1)dt = \int_{x+1}^{x+2} f(u)du$$

Επομένως:

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$