

Αναλυτικές Λύσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης - Κανονικές 2011

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη θεωρήματος Fermat

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 , τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$.

Για $x > x_0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα, παίρνοντας όριο όταν $x \rightarrow x_0^+$:

$$f'(x_0) \leq 0$$

Για $x < x_0$ έχουμε $x - x_0 < 0$ και $f(x) - f(x_0) \leq 0$, άρα:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Άρα, παίρνοντας όριο όταν $x \rightarrow x_0^-$:

$$f'(x_0) \geq 0$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα. Επομένως $f'(x_0) = 0$.

Στην περίπτωση τοπικού ελαχίστου η απόδειξη γίνεται όμοια, με τις ανισότητες αντίστροφες. Και πάλι προκύπτει $f'(x_0) = 0$.

A2. Ορισμός ασύμπτωτης στο $+\infty$

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, όταν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

A3. Σωστό / Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Σωστό	Για κάθε $z \neq 0$ ισχύει $z^0 = 1$.
β	Σωστό	Αυτή είναι ισοδύναμη διατύπωση του ορισμού της 1-1 συνάρτησης.
γ	Λάθος	Ισχύει $(\epsilon f x)' = 1/\sin^2 x$ και όχι $-1/\sin^2 x$.
δ	Λάθος	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x / x = 0$, όχι 1.
ε	Σωστό	Οι γραφικές των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε $z=x+yi$, με $x,y \in \mathbb{R}$. Τότε $z-3i=x+(y-3)i$ και $\bar{z}+3i=x+(3-y)i$. Άρα οι δύο μιγαδικοί έχουν ίσα μέτρα.

B1. Γεωμετρικός τόπος

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \Rightarrow |z-3i| + |z-3i| = 2$$

$$2|z-3i|=2 \Rightarrow |z-3i|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα 1:

$$x^2+(y-3)^2=1$$

B2. Απόδειξη σχέσης

Από το B1 έχουμε $|z-3i|=1$. Επομένως:

$$(z-3i)(\bar{z}+3i)=|z-3i|^2=1$$

Επειδή $z \neq 3i$, διαιρούμε με $z-3i$ και παίρνουμε:

$$\bar{z}+3i = 1/(z-3i)$$

B3. Ο w είναι πραγματικός και $-2 \leq w \leq 2$

Από τον ορισμό του w και το B2:

$$w = z-3i + 1/(z-3i) = z-3i + \bar{z}+3i = z+\bar{z}$$

Αν $z=x+yi$, τότε $z+\bar{z}=2x$. Άρα $w=2x \in \mathbb{R}$.

Επειδή το z κινείται στον κύκλο $x^2+(y-3)^2=1$, ισχύει $-1 \leq x \leq 1$. Άρα:

$$-2 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq w \leq 2$$

B4. Απόδειξη $|z-w|=|z|$

Αφού $w=z+\bar{z}$, έχουμε:

$$z-w = z-(z+\bar{z}) = -\bar{z}$$

Άρα:

$$|z-w| = |-\bar{z}| = |\bar{z}| = |z|$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f(0)=f'(0)=0$, και:

$$e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+x f''(x)$$

Γ1. Εύρεση της f

Μεταφέρουμε τους όρους:

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + x f''(x)$$

$$(e^x - x) f''(x) + (e^x - 1) f'(x) = e^x$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος είναι παράγωγος γινομένου:

$$[(e^x - x) f'(x)]' = (e^x - x) f''(x) + (e^x - 1) f'(x)$$

Άρα:

$$[(e^x - x)f'(x)]' = e^x$$

Ολοκληρώνουμε:

$$(e^x - x)f'(x) = e^x + c$$

Για $x=0$ και $f'(0)=0$:

$$(1-0) \cdot 0 = 1+c \Rightarrow c=-1$$

Άρα:

$$f'(x) = (e^x - 1)/(e^x - x)$$

Επειδή $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η σχέση είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον:

$$[\ln(e^x - x)]' = (e^x - 1)/(e^x - x)$$

Άρα:

$$f(x) = \ln(e^x - x) + c_2$$

Από $f(0)=0$ παίρνουμε $0 = \ln 1 + c_2$, άρα $c_2=0$. Επομένως:

$$f(x) = \ln(e^x - x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Μονοτονία και ακρότατα

Έχουμε:

$$f'(x) = (e^x - 1)/(e^x - x)$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το πρόσημο της f' καθορίζεται από το $e^x - 1$.

- Για $x < 0$: $e^x - 1 < 0$, άρα $f'(x) < 0$.
- Για $x = 0$: $f'(0) = 0$.
- Για $x > 0$: $e^x - 1 > 0$, άρα $f'(x) > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, με τιμή $f(0)=0$. Δεν έχει μέγιστο.

Γ3. Δύο σημεία καμπής

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = [e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)]/(e^x - x)^2$$

$$f''(x) = [e^x(2 - x) - 1]/(e^x - x)^2$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός. Άρα το πρόσημο της f'' καθορίζεται από τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = e^x(2 - x) - 1$$

Έχουμε:

$$\varphi'(x) = e^x(1 - x)$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = e - 1 > 0, \quad \varphi(2) = -1$$

Στο $(-\infty, 1)$, επειδή η φ είναι αύξουσα και περνά από αρνητική σε θετική τιμή, έχει ακριβώς μία ρίζα $a \in (-\infty, 0)$. Στο $(1, +\infty)$, επειδή η φ είναι φθίνουσα και περνά από θετική σε αρνητική τιμή, έχει ακριβώς μία ρίζα $b \in (1, 2)$.

Επομένως η f'' αλλάζει πρόσημο ακριβώς στις δύο ρίζες α και β . Άρα η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής:

$(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$

Γ4. Μοναδική λύση της εξίσωσης

Η εξίσωση είναι:

$$\ln(e^x - x) = \sin x, \quad x \in (0, \pi/2)$$

Θέτουμε:

$$h(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$$

Η h είναι συνεχής στο $[0, \pi/2]$. Υπολογίζουμε:

$$h(0) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$$

$$h(\pi/2) = \ln(e^{\pi/2} - \pi/2) > 0$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, \pi/2)$. Για τη μοναδικότητα:

$$h'(x) = f'(x) + \eta_{\mu x}$$

Για $x \in (0, \pi/2)$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $\eta_{\mu x} > 0$, άρα $h'(x) > 0$. Η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα. Συνεπώς η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, \pi/2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται συνεχείς $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, και:

$$(1 - f(x))/e^{2x} = \int_0^{-x} e^{2t}/g(x+t) dt$$

$$(1 - g(x))/e^{2x} = \int_0^{-x} e^{2t}/f(x+t) dt$$

Δ1. Παραγωγισιμότητα και ισότητα $f=g$

Στην πρώτη σχέση κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = x+t$. Τότε $t = u-x$, όταν $t=0$ παίρνουμε $u=x$ και όταν $t=-x$ παίρνουμε $u=0$. Άρα:

$$\int_0^{-x} e^{2t}/g(x+t) dt = \int_x^0 e^{2(u-x)}/g(u) du = e^{-2x} \int_x^0 e^{2u}/g(u) du$$

Η πρώτη σχέση γίνεται:

$$1 - f(x) = \int_x^0 e^{2u}/g(u) du$$

Όμοια, από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε:

$$1 - g(x) = \int_x^0 e^{2u}/f(u) du$$

Οι συναρτήσεις $e^{2u}/g(u)$ και $e^{2u}/f(u)$ είναι συνεχείς, επειδή f, g είναι συνεχείς και θετικές. Επομένως, από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού, οι f και g είναι παραγωγίσιμες.

Παραγωγίζοντας:

$$-f'(x) = -e^{2x}/g(x) \Rightarrow f'(x) = e^{2x}/g(x)$$

$$-g'(x) = -e^{2x}/f(x) \Rightarrow g'(x) = e^{2x}/f(x)$$

Άρα:

$$f(x)f'(x) = e^{2x} \text{ και } g(x)g'(x) = e^{2x}$$

Επομένως:

$$(f^2(x))' = 2e^{2x} \text{ και } (g^2(x))' = 2e^{2x}$$

Άρα η διαφορά $f^2 - g^2$ είναι σταθερή. Για $x=0$, από τις ολοκληρωτικές σχέσεις παίρνουμε $f(0)=1$ και $g(0)=1$. Συνεπώς:

$$f^2(0) - g^2(0) = 0$$

Άρα $f^2(x) - g^2(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή:

$$f^2(x) = g^2(x)$$

Επειδή $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, προκύπτει:

$$f(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Απόδειξη $f(x) = e^x$

Από το Δ1 έχουμε $f=g$. Άρα από τη σχέση $f'(x) = e^{2x}/g(x)$ παίρνουμε:

$$f'(x) = e^{2x}/f(x)$$

Επομένως:

$$f(x)f'(x) = e^{2x}$$

$$(f^2(x))' = 2e^{2x}$$

Ολοκληρώνοντας:

$$f^2(x) = e^{2x} + C$$

Επειδή $f(0)=1$, έχουμε $1=1+C$, άρα $C=0$. Άρα:

$$f^2(x) = e^{2x}$$

Επειδή $f(x) > 0$, παίρνουμε:

$$f(x) = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ3. Υπολογισμός ορίου

Από το Δ2, $f(x) = e^x$. Άρα:

$$\ln f(x) = \ln(e^x) = x$$

και

$$f(1/x) = e^{1/x}$$

Επομένως, για $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln f(x)]/[f(1/x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x/e^{1/x}$$

Θέτουμε $u=1/x$. Τότε $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow +\infty$ και $x=1/u$. Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x/e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} (1/u)/e^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} 1/(u e^u) = 0$$

Τελικό αποτέλεσμα: 0.

Δ4. Εμβαδόν χωρίου

Έχουμε $f(x) = e^x$, άρα:

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt = \int_1^x e^{t^2} dt$$

Για $0 \leq x \leq 1$ ισχύει:

$$F(x) = \int_1^x e^{\{t^2\}} dt = - \int_x^1 e^{\{t^2\}} dt < 0$$

Το ζητούμενο χωρίο βρίσκεται ανάμεσα στον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της F , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$. Επομένως το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 [0 - F(x)] dx = \int_0^1 \int_x^1 e^{\{t^2\}} dt dx$$

Αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης στο τρίγωνο $0 \leq x \leq t \leq 1$:

$$E = \int_0^1 \int_0^t e^{\{t^2\}} dx dt = \int_0^1 t e^{\{t^2\}} dt$$

Θέτουμε $u=t^2$, άρα $du=2t dt$. Τότε:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2}(e-1)$$

Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E = (e-1)/2$$