

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2012 - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Αναλυτικές λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη: Αν f συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Παίρνουμε δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Από την υπόθεση έχουμε $f'(\xi) > 0$, ενώ $x_2 - x_1 > 0$. Άρα:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Επομένως για κάθε $x_1 < x_2$ στο Δ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

A2. Συνέχεια σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, όταν:

- είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του (α, β) ,
- είναι δεξιά συνεχής στο α , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$,
- είναι αριστερά συνεχής στο β , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

A3. Τοπικό μέγιστο.

Η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται τοπικό μέγιστο της f .

A4. Σωστό - Λάθος.

α) Σωστό. Οι εικόνες των z και $\bar{z}$ έχουν ίδιες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες, άρα είναι συμμετρικές ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Σωστό. Η f είναι 1-1 ακριβώς όταν κάθε τιμή y του συνόλου τιμών της αντιστοιχεί σε μία μόνο τιμή του x .

γ) Λάθος. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε κοντά στο x_0 η $f(x)$ είναι θετική και μάλιστα γίνεται αυθαίρετα μεγάλη, όχι αρνητική.

δ) Λάθος. Ισχύει $(\sin x)' = \cos x$, όχι $+1/\eta\mu^2 x$.

ε) Λάθος. Ο σωστός τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη είναι $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Γεωμετρικός τόπος των z .

Θέτουμε $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$$

έχουμε:

$$(x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B2. Υπολογισμός του $|z_1 + z_2|$.

Από το B1 έχουμε $|z_1|=|z_2|=1$. Δίνεται επίσης $|z_1 - z_2|=\sqrt{2}$. Υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

$$2 = 1 + 1 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0.$$

Τότε:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = 1 + 1 + 0 = 2.$$

$$\text{Άρα } |z_1 + z_2| = \sqrt{2}.$$

B3. Γεωμετρικός τόπος των w και μέγιστη/ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Θέτουμε $w=x+yi$. Τότε $\bar{w}=x-yi$ και:

$$w - 5\bar{w} = (x+yi) - 5(x-yi) = -4x + 6yi.$$

Από τη σχέση $|w-5\bar{w}|=12$ παίρνουμε:

$$|-4x+6yi|=12$$

$$16x^2 + 36y^2 = 144$$

$$x^2/9 + y^2/4 = 1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η έλλειψη με εξίσωση:

$$x^2/9 + y^2/4 = 1.$$

Για την τιμή του $|w|$ έχουμε $|w|^2=x^2+y^2$. Από την εξίσωση της έλλειψης:

$$y^2 = 4(1 - x^2/9).$$

Άρα:

$$|w|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 4(1 - x^2/9) = 4 + 5x^2/9.$$

Επειδή στην έλλειψη ισχύει $0 \leq x^2 \leq 9$, παίρνουμε:

$$4 \leq |w|^2 \leq 9$$

$$2 \leq |w| \leq 3.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι 2 και η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι 3.

B4. Απόδειξη της ανισότητας $1 \leq |z-w| \leq 4$.

Από τα προηγούμενα έχουμε $|z|=1$ και $2 \leq |w| \leq 3$. Με την τριγωνική ανισότητα:

$$|z-w| \leq |z| + |w| \leq 1 + 3 = 4.$$

Επίσης, από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα:

$$|z-w| \geq ||w|-|z|| = | |w|-1 |.$$

Επειδή $|w| \geq 2$, έχουμε $|w|-1 \geq 1$, οπότε:

$$|z-w| \geq |w|-1 \geq 1.$$

Συνεπώς:

$$1 \leq |z-w| \leq 4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μονοτονία και σύνολο τιμών της $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$.

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = [(x-1)\ln x]' = \ln x + (x-1)/x$$

$$f'(x) = \ln x + 1 - 1/x.$$

Μελετούμε τη f' μέσω της παραγώγου της:

$$f''(x) = 1/x + 1/x^2 > 0, \text{ για κάθε } x>0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επίσης:

$$f'(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0.$$

Επομένως:

- για $0 < x < 1$ ισχύει $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$,
- για $x > 1$ ισχύει $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Στο $x=1$ η f παίρνει ελάχιστη τιμή:

$$f(1) = (1-1)\ln 1 - 1 = -1.$$

Επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f((0, +\infty)) = [-1, +\infty).$$

Γ2. Η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x>0$, έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Επειδή $x>0$, μπορούμε να πάρουμε λογάριθμο και στα δύο μέλη:

$$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013.$$

Με βάση τον τύπο της f :

$$f(x) = (x-1)\ln x - 1,$$

η εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = 2012.$$

Από το Γ1 η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, έχει ελάχιστη τιμή -1 στο $x=1$ και τείνει στο $+\infty$ στα άκρα του πεδίου ορισμού.

Στο διάστημα $(0, 1]$ η f παίρνει όλες τις τιμές από $+\infty$ μέχρι -1 , άρα η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει ακριβώς μία ρίζα εκεί.

Στο διάστημα $[1, +\infty)$ η f παίρνει όλες τις τιμές από -1 μέχρι $+\infty$, άρα η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει ακριβώς μία ρίζα εκεί.

Συνεπώς η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Ύπαρξη $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

Από το Γ2 οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης ικανοποιούν:

$$(x_1-1)\ln x_1 = 2013, \quad (x_2-1)\ln x_2 = 2013,$$

με $x_1 < 1 < x_2$. Υπολογίζουμε:

$$f'(x) + f(x) = [\ln x + 1 - 1/x] + [(x-1)\ln x - 1]$$

$$f'(x) + f(x) = x \ln x - 1/x.$$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση:

$$h(x) = f'(x) + f(x) = x \ln x - 1/x.$$

Στο x_1 έχουμε:

$$h(x_1) = x_1 \ln x_1 - 1/x_1 = (x_1 - 1) \ln x_1 + \ln x_1 - 1/x_1$$

$$h(x_1) = 2013 + \ln x_1 - 1/x_1.$$

Επειδή $0 < x_1 < 1$, ισχύει $\ln x_1 - 1/x_1 < -1$, άρα:

$$h(x_1) < 2012.$$

Στο x_2 έχουμε $x_2 > 1$, άρα $\ln x_2 - 1/x_2 > -1$. Επομένως:

$$h(x_2) = 2013 + \ln x_2 - 1/x_2 > 2012.$$

Άρα:

$$h(x_1) < 2012 < h(x_2).$$

Επειδή η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$h(x_0) = 2012,$$

δηλαδή:

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012.$$

Γ4. Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από $g(x) = f(x) + 1$, τον x και την ευθεία $x = e$.

Έχουμε:

$$g(x) = f(x) + 1 = (x-1) \ln x.$$

Η g μηδενίζεται στο $x=1$, αφού $g(1)=0$. Για $1 \leq x \leq e$ ισχύει $g(x) \geq 0$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx.$$

Υπολογίζουμε:

$$E = \int_1^e x \ln x \, dx - \int_1^e \ln x \, dx.$$

$$\int x \ln x \, dx = (x^2/2) \ln x - x^2/4$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x.$$

Άρα μία παράγουσα της $(x-1) \ln x$ είναι:

$$\Phi(x) = (x^2/2) \ln x - x^2/4 - x \ln x + x.$$

Οπότε:

$$E = [\Phi(x)]_1^e.$$

Υπολογίζουμε τις τιμές:

$$\Phi(e) = (e^2/2) \cdot 1 - e^2/4 - e \cdot 1 + e = e^2/4$$

$$\Phi(1) = 0 - 1/4 - 0 + 1 = 3/4.$$

Άρα:

$$E = e^2/4 - 3/4 = (e^2 - 3)/4.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Απόδειξη ότι η f είναι παραγωγίσιμη και εύρεση τύπου.

Από την υπόθεση $f(x) \neq 0$ και τη συνέχεια της f στο $(0, +\infty)$, η f δεν μπορεί να αλλάζει πρόσημο. Άρα έχει σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Χρησιμοποιούμε τη δεύτερη σχέση. Θέτουμε:

$$u = x^2 - x + 1.$$

Τότε $x - x^2 = 1 - u$, και η σχέση γίνεται:

$$\int_0^1 1^u f(t) dt \geq (1-u)/e.$$

Ισοδύναμα:

$$H(u) = \int_0^1 1^u f(t) dt + (u-1)/e \geq 0.$$

Για $u=1$ έχουμε $H(1)=0$, άρα το $u=1$ είναι θέση ελαχίστου της H . Επομένως:

$$H'(1)=0.$$

Επειδή $H'(u)=f(u)+1/e$, παίρνουμε:

$$f(1)+1/e=0 \Rightarrow f(1)=-1/e.$$

Άρα η f είναι αρνητική σε όλο το $(0, +\infty)$, αφού έχει σταθερό πρόσημο. Συνεπώς:

$$|f(x)| = -f(x).$$

Θέτουμε:

$$I(x) = \int_0^x 1^t (\ln t - t)/f(t) dt.$$

Η τρίτη σχέση γράφεται:

$$\ln x - x = -(I(x) + e)|f(x)|.$$

Επειδή $|f(x)| = -f(x)$, έχουμε:

$$\ln x - x = (I(x) + e)f(x).$$

Επειδή $\ln x - x < 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) \neq 0$, ο παράγοντας $I(x) + e$ δεν μηδενίζεται. Άρα:

$$f(x) = (\ln x - x)/(I(x) + e).$$

Η I είναι παραγωγίσιμη, αφού η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνεχής. Άρα και η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με μη μηδενικό παρονομαστή.

Παραγωγίζουμε τη σχέση:

$$\ln x - x = (I(x) + e)f(x).$$

Παίρνουμε:

$$1/x - 1 = I'(x)f(x) + (I(x) + e)f'(x).$$

Όμως:

$$I'(x) = (\ln x - x)/f(x), \text{ και } I(x) + e = (\ln x - x)/f(x).$$

Άρα:

$$1/x - 1 = (\ln x - x) + [(\ln x - x)/f(x)]f'(x).$$

Επομένως:

$$f'(x)/f(x) = [1/x - 1 - \ln x + x]/(\ln x - x).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$[e^{-x}(\ln x - x)]' / [e^{-x}(\ln x - x)] = [1/x - 1 - \ln x + x]/(\ln x - x).$$

Άρα η f είναι της μορφής:

$$f(x) = c e^{-x}(\ln x - x).$$

Από $f(1)=-1/e$:

$$f(1)=c e^{-1}(\ln 1-1)=c e^{-1}(-1)=-c/e.$$

$$-c/e = -1/e \Rightarrow c=1.$$

Άρα:

$$f(x)=e^{-x}(\ln x-x), x>0.$$

Δ2. Υπολογισμός ορίου.

Ζητείται:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(f(x))^2 \eta\mu(1/f(x)) - f(x)].$$

Από τον τύπο της f:

$$f(x)=e^{-x}(\ln x-x).$$

Όταν $x \rightarrow 0^+$, έχουμε $\ln x \rightarrow -\infty$ και $e^{-x} \rightarrow 1$, άρα:

$$f(x) \rightarrow -\infty.$$

Θέτουμε $y=1/f(x)$. Τότε $y \rightarrow 0^-$ και:

$$\begin{aligned} (f(x))^2 \eta\mu(1/f(x)) - f(x) &= \eta\mu y / y^2 - 1/y \\ &= (\eta\mu y - y) / y^2. \end{aligned}$$

Επειδή $\eta\mu y - y \sim -y^3/6$ όταν $y \rightarrow 0$, έχουμε:

$$(\eta\mu y - y) / y^2 \sim -y/6 \rightarrow 0.$$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι:

$$0.$$

Δ3. Κυρτότητα της F και απόδειξη $F(x)+F(3x)>2F(2x)$.

Έχουμε:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt, \alpha>0.$$

Άρα:

$$F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x).$$

Υπολογίζουμε την f':

$$f'(x)=e^{-x}[1/x - 1 - \ln x + x].$$

Με βάση την ανισότητα $\ln x \leq x-1$ έχουμε:

$$-\ln x \geq 1-x.$$

Άρα:

$$1/x - 1 - \ln x + x \geq 1/x - 1 + 1 - x + x = 1/x > 0.$$

Επειδή $e^{-x}>0$, προκύπτει:

$$f'(x)>0, \text{ για κάθε } x>0.$$

Άρα:

$$F''(x)>0, \text{ για κάθε } x>0.$$

Επομένως η F είναι γνησίως κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$, ο αριθμός $2x$ είναι το μέσο των x και $3x$:

$$2x = (x+3x)/2.$$

Επειδή η F είναι γνησίως κυρτή:

$$F((x+3x)/2) < [F(x)+F(3x)]/2.$$

Άρα:

$$F(2x) < [F(x)+F(3x)]/2$$

$$F(x)+F(3x) > 2F(2x).$$

Δ4. Ύπαρξη και μοναδικότητα $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιου ώστε $F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$.

Από τον τύπο της f έχουμε:

$$f(x)=e^{-x}(\ln x-x).$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x \leq x-1$, άρα $\ln x-x \leq -1 < 0$. Επομένως:

$$f(x) < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα:

$$F'(x)=f(x) < 0,$$

οπότε η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Θέτουμε:

$$K = [F(\beta)+F(3\beta)]/2.$$

Επειδή η F είναι γνησίως φθίνουσα και $\beta < 3\beta$, έχουμε:

$$F(\beta) > F(3\beta),$$

άρα:

$$K < F(\beta).$$

Από το Δ3, για $x=\beta$:

$$F(\beta)+F(3\beta) > 2F(2\beta).$$

Άρα:

$$K > F(2\beta).$$

Συνεπώς:

$$F(2\beta) < K < F(\beta).$$

Η F είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\beta, 2\beta]$. Άρα, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\xi)=K.$$

Δηλαδή:

$$F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi).$$

Η μοναδικότητα προκύπτει από τη γνησίως φθίνουσα μονοτονία της F : μία γνησίως μονότονη συνάρτηση δεν μπορεί να πάρει την ίδια τιμή σε δύο διαφορετικά σημεία.