

Πανελλαδικές 2013 - Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Αναλυτικές λύσεις

Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση - Γ' Ημερησίου ΓΕΛ και ΕΠΑΛ (Ομάδα Β')

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και G παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Δηλαδή ισχύει:

$$G'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η F είναι παράγουσα της f , άρα:

$$F'(x) = f(x).$$

Εφόσον και οι F, G είναι παράγουσες της ίδιας συνάρτησης f στο ίδιο διάστημα, διαφέρουν κατά σταθερά. Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$F(x) = G(x) + c.$$

Για $x = \alpha$ έχουμε:

$$F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt = 0.$$

Άρα:

$$0 = G(\alpha) + c \Rightarrow c = -G(\alpha).$$

Επομένως:

$$F(x) = G(x) - G(\alpha).$$

Για $x = \beta$ παίρνουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = F(\beta) = G(\beta) - G(\alpha).$$

Άρα αποδείχθηκε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

A2. Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = [f(\beta) - f(\alpha)] / (\beta - \alpha).$$

A3. Παραγωγισιμότητα σε κλειστό διάστημα

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν:

- είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (\alpha, \beta)$,
- είναι παραγωγίσιμη από δεξιά στο α , δηλαδή υπάρχει το $f'_+(\alpha)$,
- είναι παραγωγίσιμη από αριστερά στο β , δηλαδή υπάρχει το $f'_-(\beta)$.

A4. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Λάθος	Η εξίσωση $ z - z_0 = \rho$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ , όχι ρ^2 .
β	Σωστό	Αν το όριο της f στο x_0 είναι αρνητικό, τότε οι τιμές της f είναι αρνητικές κοντά στο x_0 .
γ	Σωστό	Ισχύει $ \eta \mu x \leq x $ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
δ	Λάθος	$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 1)/x = 0$, όχι 1.
ε	Σωστό	Σε κάθε διάστημα χωρίς ρίζες, μια συνεχής συνάρτηση δεν μπορεί να αλλάξει πρόσημο.

ΘΕΜΑ Β

B1. Γεωμετρικός τόπος

Δίνεται:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) = |z - 2|^2.$$

Θέτουμε $r = |z - 2|$, με $r \geq 0$. Τότε η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$r^2 + r = 2 \Rightarrow r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r + 2) = 0.$$

Επειδή $r \geq 0$, απορρίπτεται η λύση $r = -2$. Άρα:

$$r = 1 \Rightarrow |z - 2| = 1.$$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Για κάθε τέτοιο z , από την τριγωνική ανισότητα:

$$|z| = |(z - 2) + 2| \leq |z - 2| + |2| = 1 + 2 = 3.$$

Άρα $|z| \leq 3$.

B2. Προσδιορισμός β και γ

Οι z_1, z_2 ανήκουν στον κύκλο $|z - 2| = 1$. Άρα γράφονται:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad \text{με } (x_i - 2)^2 + y_i^2 = 1.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $-1 \leq y_i \leq 1$. Δίνεται:

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = |y_1 - y_2| = 2.$$

Η μέγιστη δυνατή απόσταση δύο αριθμών στο διάστημα $[-1, 1]$ είναι 2. Άρα αναγκαστικά:

$$\{y_1, y_2\} = \{1, -1\}.$$

Στον κύκλο $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, αν $y = 1$ ή $y = -1$, τότε:

$$(x - 2)^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Άρα οι δύο μιγαδικοί είναι:

$$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 2 - i \quad (\text{με οποιαδήποτε σειρά}).$$

Εφόσον είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, από τους τύπους Vieta:

$$z_1 + z_2 = -\beta, \quad z_1 z_2 = \gamma.$$

Υπολογίζουμε:

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (2 - i) = 4 \Rightarrow -\beta = 4 \Rightarrow \beta = -4.$$

$$z_1 z_2 = (2 + i)(2 - i) = 4 - i^2 = 5 \Rightarrow \gamma = 5.$$

Άρα $\beta = -4$ και $\gamma = 5$.

B3. Απόδειξη ότι $|v| < 4$

Έστω ότι οι $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ανήκουν στον κύκλο του B1. Από το B1 έχουμε για καθέναν από αυτούς:

$$|\alpha_0| \leq 3, \quad |\alpha_1| \leq 3, \quad |\alpha_2| \leq 3.$$

Ο v ικανοποιεί:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0.$$

Πρώτα, $v \neq 0$, γιατί αν $v = 0$ τότε $\alpha_0 = 0$, όμως ο 0 δεν ανήκει στον κύκλο $|z - 2| = 1$.

Άρα, από την εξίσωση:

$$v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0.$$

Παίρνουμε μέτρα και χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα:

$$|v|^3 \leq |\alpha_2| |v|^2 + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3.$$

Θέτουμε $r = |v| > 0$. Τότε:

$$r^3 \leq 3r^2 + 3r + 3.$$

Αν ήταν $r \geq 4$, τότε:

$$r^3 - 3r^2 - 3r - 3 \geq 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 - 3 = 64 - 48 - 12 - 3 = 1 > 0,$$

οπότε θα ίσχυε $r^3 > 3r^2 + 3r + 3$, άτοπο.

Άρα δεν μπορεί $r \geq 4$. Επομένως $|v| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εύρεση της f

Δίνεται:

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε:

$$y(x) = f(x) + x.$$

Τότε:

$$y'(x) = f'(x) + 1.$$

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$y(x)y'(x) = x.$$

Επειδή $(y^2)' = 2yy'$, έχουμε:

$$1/2 \cdot (y^2(x))' = x \Rightarrow (y^2(x))' = 2x.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$y^2(x) = x^2 + c.$$

Από $f(0) = 1$ παίρνουμε:

$$y(0) = f(0) + 0 = 1.$$

Άρα:

$$y^2(0) = 1 \Rightarrow c = 1.$$

Επομένως:

$$y^2(x) = x^2 + 1.$$

Δηλαδή:

$$(f(x) + x)^2 = x^2 + 1.$$

Επειδή $f(x) + x$ είναι συνεχής, $f(0) + 0 = 1 > 0$ και δεν μηδενίζεται, είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα:

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1}.$$

$$\text{Τελικά: } f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ2. Πλήθος πραγματικών ριζών της $f(g(x)) = 1$

Από το Γ1:

$$f(u) = \sqrt{u^2 + 1} - u.$$

Λύνουμε πρώτα την εξίσωση $f(u) = 1$:

$$\sqrt{u^2 + 1} - u = 1 \Rightarrow \sqrt{u^2 + 1} = u + 1.$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$u^2 + 1 = (u + 1)^2 = u^2 + 2u + 1 \Rightarrow u = 0.$$

Άρα:

$$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Έχουμε:

$$g(x) = x^3 + (3x^2)/2 - 1.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x + 1).$$

Άρα:

- $g'(x) > 0$ στο $(-\infty, -1)$,
- $g'(x) < 0$ στο $(-1, 0)$,
- $g'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$.

Επίσης:

$$g(-1) = -1 + 3/2 - 1 = -1/2 < 0,$$

$$g(0) = -1 < 0.$$

Στο $(-\infty, -1]$ η g αυξάνει αλλά παραμένει αρνητική μέχρι το $g(-1) = -1/2$. Στο $[-1, 0]$ μειώνεται και παραμένει αρνητική. Στο $[0, +\infty)$ αυξάνει από το -1 προς το $+\infty$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Επομένως και η $f(g(x)) = 1$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Γ3. Ύπαρξη x_0

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi/4)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{(x_0-\pi/4)^0} f(t)dt = f(x_0 - \pi/4) \cdot \varepsilon\varphi x_0.$$

Ορίζουμε στο $[0, \pi/4]$ τη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = \int_{(x-\pi/4)^0} f(t)dt - f(x - \pi/4) \cdot \varepsilon\varphi x.$$

Η Φ είναι συνεχής στο $[0, \pi/4]$, αφού η f είναι συνεχής και η $\varepsilon\varphi x$ είναι συνεχής εκεί.

Υπολογίζουμε στα άκρα:

$$\Phi(0) = \int_{(-\pi/4)^0} f(t)dt - f(-\pi/4) \cdot 0 = \int_{(-\pi/4)^0} f(t)dt > 0,$$

διότι $f(t) = \sqrt{(t^2 + 1)} - t > 0$ για κάθε t .

Επίσης:

$$\Phi(\pi/4) = \int_0^0 f(t)dt - f(0) \cdot \varepsilon\varphi(\pi/4) = 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0.$$

Άρα η συνεχής Φ παίρνει αντίθετα πρόσημα στα άκρα του $[0, \pi/4]$. Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, \pi/4)$ με:

$$\Phi(x_0) = 0.$$

Δηλαδή $\int_{(x_0-\pi/4)^0} f(t)dt = f(x_0 - \pi/4) \cdot \varepsilon\varphi x_0$, όπως ζητήθηκε.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Απόδειξη ότι $f'(1)=0$ και ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0=1$

Δίνεται:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(1 + 5h) - f(1 - h)] / h = 0.$$

Γράφουμε το κλάσμα ως άθροισμα δύο διαφορών:

$$[f(1 + 5h) - f(1 - h)]/h = [f(1 + 5h) - f(1)]/h + [f(1) - f(1 - h)]/h.$$

Για το πρώτο όριο:

$$[f(1 + 5h) - f(1)]/h = 5 \cdot [f(1 + 5h) - f(1)]/(5h) \rightarrow 5f'(1).$$

Για το δεύτερο όριο, θέτουμε $k = -h$. Τότε $k \rightarrow 0$ και:

$$[f(1) - f(1 - h)]/h = [f(1) - f(1 + k)]/(-k) = [f(1 + k) - f(1)]/k \rightarrow f'(1).$$

Άρα το δοσμένο όριο είναι:

$$5f'(1) + f'(1) = 6f'(1).$$

Επειδή το όριο δίνεται ίσο με 0:

$$6f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = 0.$$

Άρα $f'(1) = 0$.

Επιπλέον, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Εφόσον $f'(1)=0$, έχουμε:

- για $0 < x < 1$: $f'(x) < f'(1) = 0$,
- για $x > 1$: $f'(x) > f'(1) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Μάλιστα $f(1)=1$.

Δ2. Μονοτονία της g και λύση ανίσωσης

Η g δίνεται από:

$$g(x) = \int_1^x [f(t) - 1]/(t - 1) dt, \quad x \in (1, +\infty), \alpha > 1.$$

Από το Δ1, η f έχει ελάχιστο στο 1 και $f(1)=1$. Άρα για κάθε $t > 1$ ισχύει:

$$f(t) > 1.$$

Επειδή $t - 1 > 0$, παίρνουμε:

$$[f(t) - 1]/(t - 1) > 0.$$

Με το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού:

$$g'(x) = [f(x) - 1]/(x - 1) > 0, \quad \text{για κάθε } x > 1.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Πρέπει να λύσουμε:

$$\int (8x^2+5)^{(8x^2+6)} g(u) du > \int (2x^4+5)^{(2x^4+6)} g(u) du.$$

Τα δύο ολοκληρώματα έχουν διαστήματα ίδιου μήκους 1. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, το ολοκλήρωμα στο δεξιότερο διάστημα είναι μεγαλύτερο.

Άρα η ανίσωση ισοδυναμεί με:

$$8x^2 + 5 > 2x^4 + 5.$$

Λύνουμε:

$$8x^2 > 2x^4 \Rightarrow 4x^2 > x^4 \Rightarrow x^2(4 - x^2) > 0.$$

Άρα:

$$x^2 > 0 \text{ και } 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ και } |x| < 2.$$

Λύση της ανίσωσης: $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

Δ3. Κυρτότητα της g και μοναδικότητα λύσης

Έχουμε:

$$g'(x) = [f(x) - 1]/(x - 1), \quad x > 1.$$

Θα δείξουμε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα. Θέτουμε:

$$q(x) = [f(x) - 1]/(x - 1).$$

Παραγωγίζουμε:

$$q'(x) = [(x - 1)f'(x) - (f(x) - 1)]/(x - 1)^2.$$

Για $x > 1$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $t \in (1, x)$ ισχύει $f'(t) < f'(x)$. Άρα:

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t) dt < \int_1^x f'(x) dt = (x - 1)f'(x).$$

Επειδή $f(1)=1$:

$$f(x) - 1 < (x - 1)f'(x).$$

Άρα ο αριθμητής της q' είναι θετικός και ο παρονομαστής επίσης θετικός. Επομένως:

$$q'(x) > 0, \quad \text{για κάθε } x > 1.$$

Άρα η $g' = q$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η g είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η εξίσωση είναι:

$$(\alpha - 1) \int_1^\alpha [f(t) - 1]/(t - 1) dt = (f(\alpha) - 1)(\alpha - \alpha), \quad x > 1.$$

Επειδή $\alpha > 1$, διαιρούμε με $\alpha - 1 > 0$. Παίρνουμε:

$$\int \alpha^x [f(t) - 1]/(t - 1) dt = [(f(\alpha) - 1)/(\alpha - 1)](x - \alpha).$$

Με $q(x) = [f(x) - 1]/(x - 1)$, αυτό γράφεται:

$$\int \alpha^x q(t) dt = q(\alpha)(x - \alpha).$$

Για $x = \alpha$ έχουμε:

$$\int \alpha^a q(t) dt = 0 \text{ και } q(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0.$$

Άρα $x = \alpha$ είναι λύση.

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλη. Επειδή η q είναι γνησίως αύξουσα:

- Αν $x > \alpha$, τότε $q(t) > q(\alpha)$ για $t \in (\alpha, x)$, άρα $\int \alpha^x q(t) dt > q(\alpha)(x - \alpha)$.
- Αν $1 < x < \alpha$, τότε $q(t) < q(\alpha)$ για $t \in (x, \alpha)$, άρα $\int \alpha^x q(t) dt < q(\alpha)(\alpha - x)$. Πολλαπλασιάζοντας με -1 παίρνουμε $\int \alpha^x q(t) dt > q(\alpha)(x - \alpha)$.

Σε κάθε περίπτωση με $x \neq \alpha$ δεν έχουμε ισότητα.

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση, την $x = \alpha$.