

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2014 - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Αναλυτικές λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη

Έστω x_1, x_2 δύο οποιαδήποτε σημεία του διαστήματος Δ , με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο Δ , είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$. Επειδή $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) .

Άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_1, x_2]$. Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$(f(x_2)-f(x_1))/(x_2-x_1) = f'(\xi)$$

Όμως $f'(\xi)=0$, άρα:

$$(f(x_2)-f(x_1))/(x_2-x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$$

Επειδή τα x_1, x_2 ήταν τυχαία σημεία του Δ , η f παίρνει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο του Δ . Άρα η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

A2. Ορισμός κοίλης συνάρτησης

Η συνάρτηση f λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, ή είναι κοίλη στο Δ , όταν η παράγωγός της f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Ισοδύναμα, όταν υπάρχει δεύτερη παράγωγος και ισχύει $f''(x)<0$ στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

A3. Ορισμός ολικού μεγίστου

Η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

A4. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Λάθος	Αν $z=x+yi$, τότε $z-\bar{z}=2yi=2i \cdot \text{Im}(z)$, όχι $2\text{Im}(z)$.
β	Σωστό	Αν $f(x) \rightarrow +\infty$ ή $-\infty$, τότε $1/f(x) \rightarrow 0$.
γ	Σωστό	Το ολικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο ή ίσο από όλες τις τιμές της f , άρα και από όλα τα τοπικά μέγιστα.
δ	Σωστό	Ισχύει η προσθετικότητα ολοκληρώματος: $\int \alpha^\beta f = \int \alpha^\gamma f + \int \gamma^\beta f$, άρα η δοθείσα σχέση είναι ισοδύναμη.
ε	Λάθος	Μια γνησίως φθίνουσα παραγωγίσιμη συνάρτηση δεν έχει υποχρεωτικά $f'(x)<0$ παντού. Π.χ. $f(x)=-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά $f'(0)=0$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Λύση της εξίσωσης

Δίνεται:

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Θέτουμε $z=x+yi$, με $x,y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$|z|^2 = x^2 + y^2, \quad z + \bar{z} = 2x$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0$$

Χωρίζουμε σε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$\text{Πραγματικό μέρος: } 2(x^2 + y^2) - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$\text{Φανταστικό μέρος: } 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Αν $x=1$, τότε από την $x^2 + y^2 = 2$ παίρνουμε:

$$1 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ ή } y = -1$$

Άρα οι λύσεις είναι:

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i$$

B2. Υπολογισμός του w

Έχουμε:

$$w = 3 \cdot (z_1/z_2)^{39}$$

Υπολογίζουμε πρώτα το πηλίκο:

$$z_1/z_2 = (1+i)/(1-i) = ((1+i)(1+i))/((1-i)(1+i)) = (1+2i+i^2)/(1-i^2) = (2i)/2 = i$$

Άρα:

$$w = 3 \cdot i^{39}$$

Επειδή οι δυνάμεις του i έχουν περίοδο 4:

$$i^{39} = i^{(36+3)} = (i^4)^9 \cdot i^3 = 1^9 \cdot (-i) = -i$$

Επομένως:

$$w = 3 \cdot (-i) = -3i$$

B3. Γεωμετρικός τόπος

Δίνεται:

$$|u+w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

Από το B2 έχουμε $w=-3i$, $z_1=1+i$, $z_2=1-i$. Υπολογίζουμε το δεξί μέλος:

$$4z_1 - z_2 - i = 4(1+i) - (1-i) - i$$

$$= 4+4i-1+i-i = 3+4i$$

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

Άρα:

$$|u-3i| = 5$$

Αν $u=x+yi$, τότε:

$$|x+i(y-3)|=5 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=25$$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=5$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται:

$$h(x)=x-\ln(e^x+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Κυρτότητα της h

Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$h'(x)=1 - e^x/(e^x+1) = (e^x+1-e^x)/(e^x+1)=1/(e^x+1)$$

$$h''(x) = -e^x/(e^x+1)^2$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x > 0$ και $(e^x+1)^2 > 0$, άρα:

$$h''(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η h είναι κοίλη, δηλαδή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ2. Λύση της ανίσωσης

Δίνεται η ανίσωση:

$$e^{h(2h'(x))} < e/(e+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η ανίσωση είναι ισοδύναμη με:

$$h(2h'(x)) < \ln(e/(e+1))$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\ln(e/(e+1)) = \ln e - \ln(e+1) = 1 - \ln(e+1) = h(1)$$

Άρα:

$$h(2h'(x)) < h(1)$$

Επίσης:

$$h'(x)=1/(e^x+1) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως:

$$h(2h'(x)) < h(1) \Leftrightarrow 2h'(x) < 1$$

Αντικαθιστούμε $h'(x)=1/(e^x+1)$:

$$2/(e^x+1) < 1$$

$$2 < e^x+1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα η λύση είναι:

$$x \in (0, +\infty)$$

Γ3. Ασύμπτωτες

Οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Γράφουμε:

$$h(x)=x-\ln(e^x+1)=x-\ln[e^x(1+e^{-x})]$$

$$=x-[x+\ln(1+e^{-x})] = -\ln(1+e^{-x})$$

Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $e^{-x} \rightarrow 0$. Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\ln(1+0) = 0$$

Επομένως στο $+\infty$ η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ασύμπτωτη:

$$y=0$$

Πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Για $x \rightarrow -\infty$ έχουμε $e^x \rightarrow 0$. Υπολογίζουμε:

$$h(x) - x = -\ln(e^x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - x] = -\ln(1) = 0$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ είναι:

$$y=x$$

Γ4. Εμβαδόν χωρίου

Δίνεται:

$$\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$$

Αντικαθιστούμε την h :

$$\varphi(x) = e^x[x - \ln(e^x + 1) + \ln 2]$$

$$= e^x \cdot \ln(2e^x / (e^x + 1))$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τον άξονα x' :

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2e^x / (e^x + 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^x / (e^x + 1) = 1 \Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Στο διάστημα $[0, 1]$ έχουμε $\varphi(x) \geq 0$, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 e^x \cdot \ln(2e^x / (e^x + 1)) dx$$

Θέτουμε $u = e^x$, οπότε $du = e^x dx$. Για $x=0$ παίρνουμε $u=1$ και για $x=1$ παίρνουμε $u=e$. Άρα:

$$E = \int_1^e \ln(2u / (u + 1)) du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \ln(2u / (u + 1)) du = \int [\ln 2 + \ln u - \ln(u + 1)] du$$

$$= u \ln 2 + u \ln u - u - [(u + 1) \ln(u + 1) - (u + 1)]$$

$$= u \ln(2u) - (u + 1) \ln(u + 1) + 1$$

Άρα:

$$E = [u \ln(2u) - (u + 1) \ln(u + 1) + 1]_1^e$$

$$= e \cdot \ln(2e) - (e + 1) \ln(e + 1) + 1 - [\ln 2 - 2 \ln 2 + 1]$$

$$= e(1 + \ln 2) - (e + 1) \ln(e + 1) + \ln 2$$

$$= e + (e + 1) \ln 2 - (e + 1) \ln(e + 1)$$

$$E = e + (e + 1) \ln(2 / (e + 1))$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (e^x - 1)/x, \text{ αν } x \neq 0, \text{ και } f(0) = 1$$

Δ1. Συνέχεια στο 0 και μονοτονία

Συνέχεια στο $x_0=0$

Για $x \neq 0$:

$$f(x) = (e^x - 1)/x$$

Είναι γνωστό όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Γνησίως αύξουσα

Για $x \neq 0$:

$$f'(x) = [x \cdot e^x - (e^x - 1)]/x^2 = [(x-1)e^x + 1]/x^2$$

Θέτουμε:

$$N(x) = (x-1)e^x + 1$$

Τότε:

$$N'(x) = xe^x$$

Για $x < 0$ έχουμε $N'(x) < 0$, ενώ για $x > 0$ έχουμε $N'(x) > 0$. Επίσης $N(0) = 0$.

Στο $(-\infty, 0)$ η N είναι γνησίως φθίνουσα και τείνει στο 1 όταν $x \rightarrow -\infty$, άρα $N(x) > 0$ για κάθε $x < 0$. Στο $(0, +\infty)$ η N είναι γνησίως αύξουσα και $N(0) = 0$, άρα $N(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Επομένως, για κάθε $x \neq 0$:

$$f'(x) = N(x)/x^2 > 0$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f(0)]/x = \lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - 1)/x - 1]/x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x)/x^2 = 1/2 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2α. Μοναδική λύση της εξίσωσης

Η εξίσωση είναι:

$$\int_1^x \{2f'(t)\} f(t) dt = 0$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι $f(u) > 0$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $u > 0$, τότε $e^u - 1 > 0$ και $u > 0$, άρα $f(u) > 0$. Αν $u < 0$, τότε $e^u - 1 < 0$ και $u < 0$, άρα πάλι $f(u) > 0$. Επίσης $f(0) = 1 > 0$.

Άρα το ολοκλήρωμα μιας θετικής συνάρτησης από 1 έως a μηδενίζεται μόνο όταν $a=1$. Δηλαδή:

$$\int_1^x \{2f'(t)\} f(t) dt = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1/2$$

Θα δείξουμε ότι αυτό συμβαίνει μόνο για $x=0$. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$f(x) = (e^x - 1)/x = \int_0^1 e^{tx} dt$$

Παραγωγίζοντας ως προς x :

$$f'(x) = \int_0^1 t \cdot e^{tx} dt$$

Για $x=0$:

$$f'(0) = \int_0^1 t dt = 1/2$$

Αν $x > 0$, τότε $e^{tx} > 1$ για $t \in (0, 1]$, άρα:

$$f'(x) = \int_0^1 t e^{tx} dt > \int_0^1 t dt = 1/2$$

Αν $x < 0$, τότε $e^{tx} < 1$ για $t \in (0, 1]$, άρα:

$$f'(x) = \int_0^1 t e^{tx} dt < \int_0^1 t dt = 1/2$$

Άρα $f'(x) = 1/2$ ισχύει ακριβώς για $x = 0$. Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση, την $x = 0$.

Δ2β. Ρυθμοί μεταβολής

Το σημείο M κινείται στην καμπύλη $y = f(x)$. Άρα:

$$y(t) = f(x(t))$$

Παραγωγίζουμε ως προς t :

$$y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t)$$

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης:

$$x'(t) = 2y'(t)$$

Άρα:

$$x'(t) = 2f'(x(t))x'(t)$$

Επειδή $x'(t) > 0$, διαιρούμε με $x'(t)$:

$$1 = 2f'(x(t)) \Leftrightarrow f'(x(t)) = 1/2$$

Από το Δ2α αυτό συμβαίνει μόνο όταν $x(t) = 0$. Τότε:

$$y = f(0) = 1$$

Άρα το ζητούμενο σημείο της καμπύλης είναι:

$$M(0, 1)$$

Δ3. Τοπικά ακρότατα της g

Δίνεται:

$$g(x) = (x f(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$x f(x) = x \cdot (e^x - 1) / x = e^x - 1$$

Άρα:

$$x f(x) + 1 - e = e^x - 1 + 1 - e = e^x - e$$

Επομένως:

$$g(x) = (e^x - e)^2 (x - 2)^2 = [(e^x - e)(x - 2)]^2$$

Θέτουμε:

$$p(x) = (e^x - e)(x - 2)$$

Τότε:

$$g(x) = p^2(x) \Rightarrow g'(x) = 2p(x)p'(x)$$

Υπολογίζουμε:

$$p'(x) = e^x(x - 2) + (e^x - e) = e^x(x - 1) - e$$

Θέτουμε:

$$q(x) = p'(x) = e^x(x - 1) - e$$

Τότε:

$$q'(x) = xe^x > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η q είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επιπλέον:

$$q(1) = e(0) - e = -e < 0$$

$$q(2) = e^2(1) - e = e^2 - e > 0$$

Άρα υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $q(\alpha) = 0$, δηλαδή $p'(\alpha) = 0$.

Επίσης:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - e)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Μελετάμε το πρόσημο της $g' = 2pp'$:

Διάστημα	$(0, 1)$	$(1, \alpha)$	$(\alpha, 2)$	$(2, +\infty)$
$p(x)$	+	-	-	+
$p'(x)$	-	-	+	+
$g'(x) = 2pp'$	-	+	-	+

Από τον πίνακα προσήμων:

- Στο $x=1$ η g' αλλάζει από αρνητική σε θετική, άρα η g έχει τοπικό ελάχιστο.
- Στο $x=\alpha$ η g' αλλάζει από θετική σε αρνητική, άρα η g έχει τοπικό μέγιστο.
- Στο $x=2$ η g' αλλάζει από αρνητική σε θετική, άρα η g έχει τοπικό ελάχιστο.

Επομένως η g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων, τις $x=1$ και $x=2$, και μία θέση τοπικού μεγίστου, την $\alpha \in (1, 2)$, όπου:

$$e^\alpha(\alpha - 1) - e = 0$$