

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2015

Αναλυτικές λύσεις

Πανελλαδικές Εξετάσεις Γ' Ημερησίου ΓΕΛ και ΕΠΑΛ (Ομάδα Β'), 25 Μαΐου 2015

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω f συνεχής στο $[α,β]$ και $f(α) \neq f(β)$. Παίρνουμε έναν αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$.

Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $f(α) < \eta < f(β)$. Η άλλη περίπτωση είναι ανάλογη.

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \eta, \quad x \in [α,β].$$

Η g είναι συνεχής στο $[α,β]$, επειδή f είναι συνεχής και η αφαίρεση σταθεράς διατηρεί τη συνέχεια. Επίσης:

$$g(α) = f(α) - \eta < 0, \quad g(β) = f(β) - \eta > 0.$$

Άρα οι τιμές $g(α)$, $g(β)$ είναι ετερόσημες. Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (α,β)$ τέτοιο ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Rightarrow f(x_0) = \eta.$$

Άρα για κάθε η μεταξύ των $f(α)$, $f(β)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (α,β)$ με $f(x_0) = \eta$.

A2. Συνέχεια σε σημείο

Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 , όπου x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της, όταν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ισοδύναμα: υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

A3. Τοπικό ελάχιστο

Η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Δηλαδή, σε μια περιοχή του x_0 , η τιμή $f(x_0)$ είναι η μικρότερη ή ίση από όλες τις γειτονικές τιμές της f .

A4. Σωστό - Λάθος

α) Λάθος. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικά δεν είναι αντιμεταθετική, δηλαδή συνήθως $f \circ g \neq g \circ f$.

β) Σωστό. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, τότε $z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$, άρα η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων.

γ) Λάθος. Ισχύει $(\sin x)' = \cos x$, όχι $\eta \mu x$.

δ) Σωστό. Αν f συνεχής, $f(x) \geq 0$ στο $[α,β]$ και δεν είναι παντού μηδέν, τότε το ολοκλήρωμα είναι θετικό.

ε) Σωστό. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $1/f(x)$ τείνει στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Γεωμετρικός τόπος

Θέτουμε $z = x + yi$. Τότε:

$$|z-4| = 2|z-1|$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$(x-4)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2]$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$$

$$0 = 3x^2 + 3y^2 - 12$$

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

B2. Ιδιότητες του w

Από το B1 έχουμε $|z_1| = |z_2| = 2$. Άρα οι z_1, z_2 γράφονται στη μορφή:

$$z_1 = 2(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_2 = 2(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Τότε:

$$z_1/z_2 = \cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta),$$

$$z_2/z_1 = \cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi) = \cos(\varphi-\theta) - i\sin(\varphi-\theta).$$

Άρα:

$$w = 2z_1/z_2 + 2z_2/z_1$$

$$= 2[\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)] + 2[\cos(\varphi-\theta) - i\sin(\varphi-\theta)]$$

$$= 4\cos(\varphi-\theta).$$

Επομένως ο w είναι πραγματικός.

Επειδή $-1 \leq \cos(\varphi-\theta) \leq 1$, πολλαπλασιάζοντας με 4 παίρνουμε:

$$-4 \leq w \leq 4.$$

B3. Περίπτωση $w = -4$ και ισοσκελές τρίγωνο

Από το B2 έχουμε:

$$w = 4\cos(\varphi-\theta).$$

Αν $w = -4$, τότε:

$$4\cos(\varphi-\theta) = -4 \Rightarrow \cos(\varphi-\theta) = -1.$$

Άρα οι διανυσματικές ακτίνες των z_1 και z_2 είναι αντίθετες, οπότε:

$$z_2 = -z_1.$$

Δίνεται $z_3 = 2iz_1$. Οι κορυφές είναι $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$. Υπολογίζουμε μήκη:

$$A\Gamma = |z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1||2i - 1| = 2\sqrt{5}.$$

$$B\Gamma = |z_3 - z_2| = |2iz_1 - (-z_1)| = |z_1||2i + 1| = 2\sqrt{5}.$$

Άρα $A\Gamma = B\Gamma$, επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ .

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μονοτονία και σύνολο τιμών της f

Δίνεται:

$$f(x) = e^x / (x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παραγωγίζουμε:

$$f'(x) = [e^x(x^2 + 1) - e^x \cdot 2x] / (x^2 + 1)^2$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 2x + 1) / (x^2 + 1)^2 = e^x(x - 1)^2 / (x^2 + 1)^2.$$

Επειδή $e^x > 0$ και $(x^2 + 1)^2 > 0$ για κάθε x , έχουμε:

$$f'(x) \geq 0, \text{ με } f'(x) = 0 \text{ μόνο για } x = 1.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η παράγωγος μηδενίζεται μόνο σε μεμονωμένο σημείο, άρα δεν δημιουργείται διάστημα σταθερότητας.

Υπολογίζουμε τα όρια στα άκρα του $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x / (x^2 + 1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / (x^2 + 1) = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, με τα παραπάνω όρια, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty).$$

Γ2. Μοναδική ρίζα της εξίσωσης

Η εξίσωση είναι:

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = e^2 / 5.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f(2) = e^2 / (2^2 + 1) = e^2 / 5.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα ένα προς ένα, η εξίσωση ισοδυναμεί με:

$$e^{3-x}(x^2 + 1) = 2.$$

Θέτουμε:

$$h(x) = e^{(3-x)(x^2+1)}.$$

Η h είναι συνεχής και:

$$h'(x) = e^{(3-x)} \cdot 2x - e^{(3-x)}(x^2+1)$$

$$h'(x) = e^{(3-x)}(2x - x^2 - 1) = -e^{(3-x)}(x-1)^2 \leq 0.$$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αφού η παράγωγος μηδενίζεται μόνο στο $x=1$.

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

Άρα, επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα από το $+\infty$ στο 0, η εξίσωση $h(x)=2$ έχει μία ακριβώς λύση. Επομένως και η αρχική εξίσωση έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

Γ3. Απόδειξη ανισότητας ολοκληρώματος

Για $x>0$ ισχύει $2x < 4x$. Από το Γ1 η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα για κάθε $t \in [2x, 4x]$ έχουμε:

$$f(t) < f(4x).$$

Ολοκληρώνοντας στο $[2x, 4x]$:

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < \int_{2x}^{4x} f(4x) dt$$

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < (4x-2x)f(4x)$$

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x f(4x).$$

Γ4. Μονotonία της g

Για $x>0$ δίνεται:

$$g(x) = 1/x \cdot \int_{2x}^{4x} f(t) dt, \quad \text{ενώ } g(0)=2.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $t=xu$. Τότε $dt=xdu$ και τα όρια $t=2x$, $t=4x$ δίνουν $u=2$, $u=4$. Άρα, για $x>0$:

$$g(x) = 1/x \cdot \int_2^4 f(xu) x du = \int_2^4 f(xu) du.$$

Επίσης:

$$g(0)=2 = \int_2^4 1 du = \int_2^4 f(0) du, \text{ αφού } f(0)=1.$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε ενιαία:

$$g(x) = \int_2^4 f(xu) du, \quad x \geq 0.$$

Έστω $0 \leq x_1 < x_2$. Για κάθε $u \in [2, 4]$ ισχύει $x_1 u < x_2 u$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα:

$$f(x_1 u) < f(x_2 u).$$

Ολοκληρώνοντας ως προς u στο $[2, 4]$, παίρνουμε:

$$\int_2^4 f(x_1 u) du < \int_2^4 f(x_2 u) du$$

$$g(x_1) < g(x_2).$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εύρεση της f

Δίνεται:

$$f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2, \quad f(0) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}(e^{f(x)} - e^{-f(x)})' &= f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} \\ &= f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2.\end{aligned}$$

Άρα:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c.$$

Για $x=0$ και $f(0)=0$:

$$e^0 - e^0 = 0 = c,$$

οπότε:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x.$$

Θέτουμε $y = e^{f(x)} > 0$. Τότε $e^{-f(x)} = 1/y$ και:

$$y - 1/y = 2x.$$

Πολλαπλασιάζουμε με y :

$$y^2 - 1 = 2xy \Rightarrow y^2 - 2xy - 1 = 0.$$

Λύνουμε ως προς y :

$$y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Επειδή $y = e^{f(x)} > 0$ και $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$, κρατάμε μόνο τη θετική λύση:

$$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Άρα:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ2α. Κυρτότητα, κοίλη και σημείο καμψής

Από το Δ1:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι η αντίστροφη υπερβολική ημίτονος, δηλαδή $f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$. Έτσι:

$$f'(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}.$$

Παραγωγίζουμε ξανά:

$$f''(x) = -x/(x^2+1)^{3/2}.$$

Άρα:

Για $x < 0$: $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$.

Για $x > 0$: $f''(x) < 0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

Στο $x=0$ η f'' αλλάζει πρόσημο. Επίσης $f(0)=0$. Άρα το σημείο καμπής είναι:

$$K(0,0).$$

Δ2β. Εμβαδόν χωρίου

Το χωρίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

Για $x > 0$ έχουμε $f'(x) = 1/\sqrt{x^2+1} < 1$ και $f(0)=0$. Άρα $f(x) < x$ στο $(0,1]$. Το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 [x - f(x)] dx.$$

Υπολογίζουμε:

$$\int_0^1 x dx = 1/2.$$

Επίσης:

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C.$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= [x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}]_0^1 \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} - (0 - 1) \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} E &= 1/2 - [\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1] \\ E &= \sqrt{2} - 1/2 - \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Δ3. Υπολογισμός ορίου

Θέλουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) \cdot \ln|f(x)|].$$

Από το Δ1, κοντά στο 0 ισχύει $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ και $f(0)=0$. Επίσης $f'(0)=1$, άρα:

$$f(x) \sim x, \text{ όταν } x \rightarrow 0^+.$$

Επομένως:

$$f^2(x) \sim x^2$$

και

$$\int_0^x f^2(t)dt \sim \int_0^x t^2 dt = x^3/3.$$

Επίσης, για μικρό θετικό x :

$$\ln|f(x)| \sim \ln x.$$

Τέλος:

$$e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1 \sim \int_0^x f^2(t)dt \sim x^3/3.$$

Άρα το ζητούμενο όριο έχει την ίδια συμπεριφορά με:

$$(x^3/3)\ln x.$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0,$$

παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1) \cdot \ln|f(x)|] = 0.$$

Δ4. Ύπαρξη ρίζας στο (2,3)

Ορίζουμε στο (2,3) τη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = [1 - 3 \int_0^{x-2} f^2(t)dt]/(x-3) + [8 - 3 \int_0^x f^2(t)dt]/(x-2).$$

Η Φ είναι συνεχής στο (2,3), αφού οι παρονομαστές $x-3$ και $x-2$ δεν μηδενίζονται μέσα στο ανοικτό διάστημα.

Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της κοντά στα άκρα του διαστήματος.

Για $t > 0$ έχουμε $f(t) < t$, όπως φάνηκε στο Δ2β. Άρα $f^2(t) < t^2$ για $t > 0$.

Κοντά στο 2 από δεξιά:

$$8 - 3 \int_0^2 f^2(t)dt > 8 - 3 \int_0^2 t^2 dt = 8 - 3 \cdot (8/3) = 0.$$

Άρα ο αριθμητής του δεύτερου κλάσματος είναι θετικός κοντά στο $x=2$, ενώ $x-2 \rightarrow 0^+$. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \Phi(x) = +\infty.$$

Κοντά στο 3 από αριστερά:

$$1 - 3 \int_0^1 f^2(t)dt > 1 - 3 \int_0^1 t^2 dt = 1 - 3 \cdot (1/3) = 0.$$

Άρα ο αριθμητής του πρώτου κλάσματος είναι θετικός κοντά στο $x=3$, ενώ $x-3 \rightarrow 0^-$. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \Phi(x) = -\infty.$$

Άρα υπάρχουν αριθμοί α, β με $2 < \alpha < \beta < 3$ τέτοιοι ώστε:

$$\Phi(\alpha) > 0 \text{ και } \Phi(\beta) < 0.$$

Η Φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, οπότε από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) \subset (2,3)$ με:

$$\Phi(\xi) = 0.$$

Επομένως η δοσμένη εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).