

Αναλυτικές Λύσεις - Μαθηματικά Πανελλαδικές 2016

Γ' Λυκείου - Προσανατολισμού / Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη κριτηρίου τοπικού μεγίστου

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , παραγωγίσιμη στο (α, β) εκτός ίσως από το x_0 , με $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) .

Από το πρόσημο της παραγώγου έχουμε:

- στο (α, x_0) η f είναι γνησίως αύξουσα,
- στο (x_0, β) η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα, για κάθε x κοντά στο x_0 :

- αν $x < x_0$, επειδή η f είναι αύξουσα αριστερά του x_0 , ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$,
- αν $x > x_0$, επειδή η f είναι φθίνουσα δεξιά του x_0 , ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$.

Επομένως υπάρχει περιοχή του x_0 στην οποία $f(x) \leq f(x_0)$. Άρα το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

A2. Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A_f = A_g$,
- και για κάθε x του κοινού πεδίου ορισμού ισχύει $f(x) = g(x)$.

A3. Θεώρημα Μέσης Τιμής και γεωμετρική ερμηνεία

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Γεωμετρικά, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τη χορδή που ενώνει τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

A4. Σωστό / Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Λάθος	Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$, όχι $G(\alpha) - G(\beta)$.
β	Σωστό	Η διάταξη διατηρείται στο όριο, όταν τα όρια υπάρχουν.
γ	Λάθος	Η παράγωγος μηδέν σε δύο ξένα διαστήματα δίνει σταθερότητα σε κάθε διάστημα χωριστά, όχι απαραίτητα στο ένωμά τους.

δ	Σωστό	Αυτό είναι ισοδύναμος χαρακτηρισμός της 1-1 συνάρτησης.
ε	Σωστό	Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για συνεχή συνάρτηση σε κλειστό διάστημα.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται $f(x)=x^2/(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Μονοτονία και ακρότατα

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = [(2x)(x^2+1) - x^2(2x)]/(x^2+1)^2 = 2x/(x^2+1)^2.$$

Επειδή $(x^2+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το πρόσημο της f' καθορίζεται από το $2x$:

- $f'(x) < 0$ για $x < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.
- $f'(x) > 0$ για $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Στο $x=0$ η παράγωγος μηδενίζεται και η f αλλάζει από φθίνουσα σε αύξουσα. Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, με τιμή $f(0)=0$.

Δεν παρουσιάζει μέγιστο στο $\mathbb{R}$, διότι $f(x) < 1$ για κάθε x και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.

B2. Κυρτότητα - σημεία καμπής

Από την $f'(x)=2x/(x^2+1)^2$ παίρνουμε:

$$f''(x) = 2(1-3x^2)/(x^2+1)^3.$$

Επειδή $(x^2+1)^3 > 0$, το πρόσημο της f'' καθορίζεται από το $1-3x^2$.

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt{3}$. Άρα η f είναι κυρτή στο $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow |x| > 1/\sqrt{3}$. Άρα η f είναι κοίλη στα $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ και $(1/\sqrt{3}, +\infty)$.

Σημεία καμπής έχουμε όταν η f'' μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο:

$$x = \pm 1/\sqrt{3} \text{ και } f(\pm 1/\sqrt{3}) = (1/3)/(1+1/3) = 1/4.$$

Άρα τα σημεία καμπής είναι $K_1(-1/\sqrt{3}, 1/4)$ και $K_2(1/\sqrt{3}, 1/4)$.

B3. Ασύμπτωτες

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν, γιατί $x^2+1 \neq 0$ για κάθε πραγματικό x .

Για οριζόντια ασύμπτωτη:

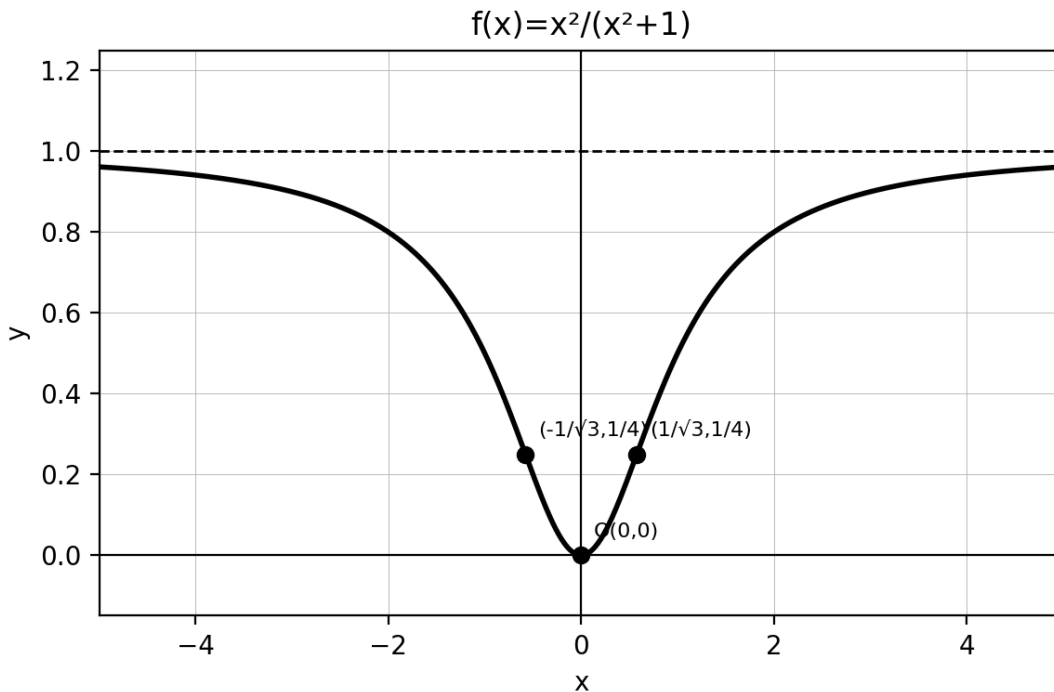
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2/(x^2+1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/(1+1/x^2) = 1.$$

Άρα η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=1$. Πλάγια ασύμπτωτη δεν υπάρχει, αφού υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$.

B4. Γραφική παράσταση

Βασικά στοιχεία σχεδίασης:

- Η f είναι άρτια, άρα η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
- Περνά από το $O(0,0)$, όπου έχει ολικό ελάχιστο.
- Έχει σημεία καμπής στα $x=\pm 1/\sqrt{3}$ με $y=1/4$.
- Πλησιάζει την ευθεία $y=1$ χωρίς να την τέμνει.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Λύση εξίσωσης $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$

Θέτουμε $t = x^2$, οπότε $t \geq 0$. Η εξίσωση γίνεται:

$$e^t - t - 1 = 0.$$

Ορίζουμε $\varphi(t) = e^t - t - 1$ για $t \geq 0$. Τότε:

$$\varphi'(t) = e^t - 1 \geq 0 \text{ για } t \geq 0, \text{ και } \varphi'(t) > 0 \text{ για } t > 0.$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, ενώ $\varphi(0) = 0$. Επομένως η μοναδική λύση είναι $t = 0$.

Άρα $x^2 = 0$, δηλαδή $x = 0$.

Γ2. Συνεχείς συναρτήσεις με $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$

Από το Γ1 γνωρίζουμε ότι:

- $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ μόνο για $x = 0$,

- $e^{x^2} - x^2 - 1 > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Η σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ δίνει:

$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ ή $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$, για κάθε x .

Στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, επειδή η f είναι συνεχής και δεν μπορεί να αλλάξει πρόσημο χωρίς να μηδενιστεί, η επιλογή προσήμου είναι σταθερή σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα. Στο $x=0$ έχουμε υποχρεωτικά $f(0)=0$.

Άρα όλες οι συνεχείς λύσεις είναι οι τέσσερις συναρτήσεις:

- $f(x)=g(x)$ για $x<0$ και $f(x)=g(x)$ για $x>0$,
- $f(x)=g(x)$ για $x<0$ και $f(x)=-g(x)$ για $x>0$,
- $f(x)=-g(x)$ για $x<0$ και $f(x)=g(x)$ για $x>0$,
- $f(x)=-g(x)$ για $x<0$ και $f(x)=-g(x)$ για $x>0$,

όπου $g(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ και σε όλες τις περιπτώσεις $f(0)=0$.

Γ3. Απόδειξη κυρτότητας για $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

Υπολογίζουμε παραγώγους:

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1).$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2 = 2[(1+2x^2)e^{x^2} - 1].$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 \geq 0$, $e^{x^2} \geq 1$ και $1+2x^2 \geq 1$. Άρα:

$$(1+2x^2)e^{x^2} \geq 1.$$

Επομένως $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Λύση εξίσωσης $f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$, $x \in [0, +\infty)$

Θέτουμε $\Phi(t) = f(t+3) - f(t)$, για $t \geq 0$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι αύξουσα. Άρα, για $t \geq 0$:

$$\Phi'(t) = f'(t+3) - f'(t) > 0, \text{ διότι } t+3 > t \text{ και η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στα θετικά.}$$

Άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$\Phi(|\eta\mu x|) = \Phi(x).$$

Επειδή η Φ είναι 1-1, προκύπτει:

$$|\eta\mu x| = x.$$

Όμως $|\eta\mu x| \leq 1$, άρα $x \leq 1$. Για $x \in [0, 1]$ έχουμε $|\eta\mu x| = \eta\mu x$. Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\eta\mu x = x.$$

Η μοναδική λύση στο $[0, 1]$ είναι $x=0$, αφού για κάθε $x > 0$ ισχύει $\eta\mu x < x$.

Τελική απάντηση: $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, και ισχύουν:

- $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta_{\mu x} dx = \pi$,
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/\eta_{\mu x} = 1$,
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Απόδειξη ότι $f(\pi) = \pi$ και $f'(0) = 1$

Από το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/\eta_{\mu x} = 1$ προκύπτει ότι $f(x) \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής, έχουμε $f(0) = 0$.

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta_{\mu x} dx = \int_0^\pi f(x) \eta_{\mu x} dx + \int_0^\pi f''(x) \eta_{\mu x} dx.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int_0^\pi f''(x) \eta_{\mu x} dx = [f'(x) \eta_{\mu x}]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sigma_{\mu x} dx.$$

Ο πρώτος όρος είναι 0, επειδή $\eta_{\mu 0} = \eta_{\mu \pi} = 0$. Ξανά κατά μέρη:

$$\int_0^\pi f'(x) \sigma_{\mu x} dx = [f(x) \sigma_{\mu x}]_0^\pi + \int_0^\pi f(x) \eta_{\mu x} dx.$$

Άρα:

$$\int_0^\pi f''(x) \eta_{\mu x} dx = -[f(x) \sigma_{\mu x}]_0^\pi - \int_0^\pi f(x) \eta_{\mu x} dx.$$

Επομένως:

$$I = -[f(x) \sigma_{\mu x}]_0^\pi = -[f(\pi) \sigma_{\mu \pi} - f(0) \sigma_{\mu 0}] = f(\pi) + f(0).$$

Επειδή $I = \pi$ και $f(0) = 0$, παίρνουμε $f(\pi) = \pi$.

Για την παράγωγο στο 0:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Γράφουμε:

$$f(x)/x = [f(x)/\eta_{\mu x}] \cdot [\eta_{\mu x}/x].$$

$$\text{Άρα } f'(0) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Δ2α. Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$:

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) f'(x) + e^x.$$

Αν η f παρουσίαζε τοπικό ακρότατο σε κάποιο x_0 , επειδή είναι παραγωγίσιμη θα είχαμε $f'(x_0) = 0$.

Βάζοντας $x=x_0$ στην παραγωγισμένη σχέση:

$$e^{f(x_0)} \cdot 0 + 1 = f'(f(x_0)) \cdot 0 + e^{f(x_0)}.$$

Άρα $1=e^{f(x_0)}$, οπότε $x_0=0$.

Όμως από το Δ1 έχουμε $f'(0)=1$, άρα το $x_0=0$ δεν μπορεί να είναι σημείο ακροτάτου. Άτοπο.

Συνεπώς η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

Δ2β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Αν μια συνεχής συνάρτηση σε διάστημα δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε αναγκαστικά δημιουργείται τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο. Εδώ η f είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής, και από το Δ2α δεν έχει ακρότατα.

Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f'(0)=1>0$, δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Υπολογισμός ορίου

Ζητείται:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ημx + συνx)/f(x).$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Άρα, όταν $x \rightarrow +\infty$, έχουμε $f(x) \rightarrow +\infty$.

Ο αριθμητής $ημx + συνx$ είναι φραγμένος, αφού:

$$|ημx + συνx| \leq |ημx| + |συνx| \leq 2.$$

Άρα πηλίκο φραγμένου αριθμητή προς παρονομαστή που τείνει στο $+\infty$ δίνει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ημx + συνx)/f(x) = 0.$$

Δ4. Απόδειξη ανισότητας ολοκληρώματος

Θέλουμε να δείξουμε:

$$0 < \int_1^{e^\pi} [f(\ln x)/x] dx < \pi^2.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής:

$$u = \ln x \Rightarrow du = dx/x.$$

Όταν $x=1$, τότε $u=0$. Όταν $x=e^\pi$, τότε $u=\pi$. Άρα:

$$\int_1^{e^\pi} [f(\ln x)/x] dx = \int_0^\pi f(u) du.$$

Από το Δ2β η f είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης $f(0)=0$ και $f(\pi)=\pi$.

Για κάθε $u \in (0, \pi)$, επειδή $0 < u < \pi$, παίρνουμε:

$$f(0) < f(u) < f(\pi), \text{ δηλαδή } 0 < f(u) < \pi.$$

Άρα:

$$0 < \int_0^\pi f(u) du < \int_0^\pi \pi du = \pi^2.$$

Επομένως:

$$0 < \int_1^{e^\pi} [f(\ln x)/x] dx < \pi^2.$$

Mr. Spience