

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2017

Μαθηματικά Προσανατολισμού - Αναλυτικές λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη μονοτονίας

Έστω x_1, x_2 δύο σημεία του διαστήματος Δ με $x_1 < x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , αφού στο εσωτερικό του Δ ισχύει η υπόθεση για την παράγωγο.

Με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, παίρνουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Άρα για κάθε $x_1 < x_2$ στο Δ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

A2. Χαρακτηρισμός ισχυρισμού

Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

Αντιπαράδειγμα:

$$f(x) = |x|$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (|x| - 0)/(x - 0) = 1, \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^-} (|x| - 0)/(x - 0) = -1$$

Τα δύο πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής είναι διαφορετικά. Άρα συνέχεια σε σημείο δεν συνεπάγεται παραγωγισιμότητα στο σημείο αυτό.

A3. Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν:

- είναι συνεχής σε κάθε σημείο x του ανοικτού διαστήματος (a, b) ,
- είναι δεξιά συνεχής στο a , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$,
- είναι αριστερά συνεχής στο b , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

A4. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Λάθος	Το γινόμενο $0 \cdot (+\infty)$ είναι απροσδιόριστη μορφή. Π.χ. $f(x)=x$ και $g(x)=1/x^2$ για $x \rightarrow 0$ δίνουν $f(x)g(x)=1/x$, που δεν έχει όριο 0.
β	Σωστό	Η $g \circ f$ ορίζεται όταν υπάρχει τουλάχιστον $x \in A$ με $f(x) \in B$, δηλαδή όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
γ	Λάθος	Η $f(x)=x^3$ είναι παραγωγίσιμη, δεν έχει ακρότατα, αλλά $f'(0)=0$.
δ	Σωστό	Για $0<a<1$ ισχύει $a^x=(1/a)^{-x}$. Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $-x \rightarrow +\infty$ και $1/a>1$, άρα $a^x \rightarrow +\infty$.
ε	Σωστό	Η εικόνα διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα. Αφού η f δεν είναι σταθερή, η εικόνα δεν εκφυλίζεται σε ένα μόνο σημείο.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=x/(1-x)$, $x \neq 1$.

B1. Προσδιορισμός της $f \circ g$

Για να ορίζεται η $f(g(x))$, πρέπει $g(x)>0$.

$$g(x)=x/(1-x)>0$$

Με πίνακα προσήμων για τους παράγοντες x και $1-x$ παίρνουμε:

$$x/(1-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

Άρα:

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=\ln(x/(1-x)), \quad x \in (0,1)$$

B2. Αντιστροφή της h

$$h(x)=\ln(x/(1-x)), \quad x \in (0,1)$$

Παραγωγίζουμε:

$$h'(x)=1/(x/(1-x)) \cdot (x/(1-x))' = (1-x)/x \cdot 1/(1-x)^2 = 1/[x(1-x)]$$

Για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $x(1-x)>0$, άρα $h'(x)>0$. Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)=-\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)=+\infty$$

Άρα $h((0,1))=\mathbb{R}$. Βρίσκουμε την αντίστροφη:

$$y=\ln(x/(1-x)) \Rightarrow e^y=x/(1-x)$$

$$e^y(1-x)=x \Rightarrow e^y=x(1+e^y) \Rightarrow x=e^y/(1+e^y)$$

Άρα:

$$h^{-1}(y)=e^y/(e^y+1), \quad y \in \mathbb{R}$$

B3. Μελέτη της ϕ

$$\phi(x)=h^{-1}(x)=e^x/(e^x+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Παράγωγος:

$$\varphi'(x) = [e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x] / (e^x+1)^2 = e^x / (e^x+1)^2$$

Επειδή $e^x > 0$ και $(e^x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $\varphi'(x) > 0$. Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Δεύτερη παράγωγος:

$$\varphi''(x) = [e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1)e^x] / (e^x+1)^4$$

$$\varphi''(x) = e^x(e^x+1)(1-e^x) / (e^x+1)^4 = e^x(1-e^x) / (e^x+1)^3$$

Το πρόσημο της φ'' εξαρτάται από το $1-e^x$:

- Αν $x < 0$, τότε $e^x < 1$, άρα $\varphi''(x) > 0$: η φ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$.
- Αν $x > 0$, τότε $e^x > 1$, άρα $\varphi''(x) < 0$: η φ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.
- Για $x=0$, $\varphi''(0)=0$ και αλλάζει πρόσημο, άρα υπάρχει σημείο καμπής.

$$\varphi(0) = 1/(1+1) = 1/2$$

Σημείο καμπής:

$$K(0, 1/2)$$

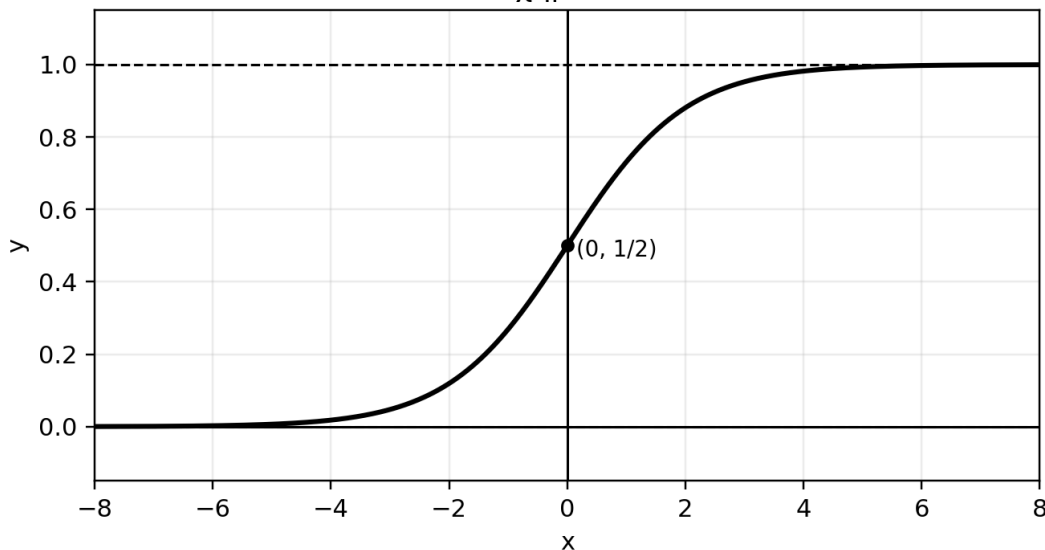
B4. Οριζόντιες ασύμπτωτες και σχήμα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x / (e^x+1) = 0 \Rightarrow y=0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / (e^x+1) = 1 \Rightarrow y=1$$

Η γραφική παράσταση είναι αυξανόμενη, περνά από το $K(0, 1/2)$, είναι κυρτή αριστερά του 0 και κοίλη δεξιά του 0.

Σχήμα B4



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$, και $A(\pi/2, -\pi/2)$.

Γ1. Εφαπτόμενες από το Α

Έστω ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $t \in [0, \pi]$ περνά από το Α.

$$f(t) = -\eta\mu t, \quad f'(t) = -\sigma\upsilon\nu t$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο t είναι:

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$y + \eta\mu t = -\sigma\upsilon\nu t(x - t)$$

Αφού περνά από το $A(\pi/2, -\pi/2)$, ισχύει:

$$-\pi/2 + \eta\mu t = -\sigma\upsilon\nu t(\pi/2 - t)$$

$$\eta\mu t + (\pi/2 - t)\sigma\upsilon\nu t = \pi/2$$

Θέτουμε:

$$F(t) = \eta\mu t + (\pi/2 - t)\sigma\upsilon\nu t$$

Τότε:

$$F'(t) = \sigma\upsilon\nu t - \sigma\upsilon\nu t - (\pi/2 - t)\eta\mu t = (t - \pi/2)\eta\mu t$$

Για $t \in (0, \pi/2)$, έχουμε $F'(t) < 0$, ενώ για $t \in (\pi/2, \pi)$, έχουμε $F'(t) > 0$. Άρα η F μειώνεται στο $(0, \pi/2)$ και αυξάνεται στο $(\pi/2, \pi)$.

Επίσης:

$$F(0) = \pi/2, \quad F(\pi) = \pi/2, \quad F(\pi/2) = 1 < \pi/2$$

Άρα η εξίσωση $F(t) = \pi/2$ έχει ακριβώς τις λύσεις $t=0$ και $t=\pi$.

Για $t=0$:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -1 \Rightarrow y = -x$$

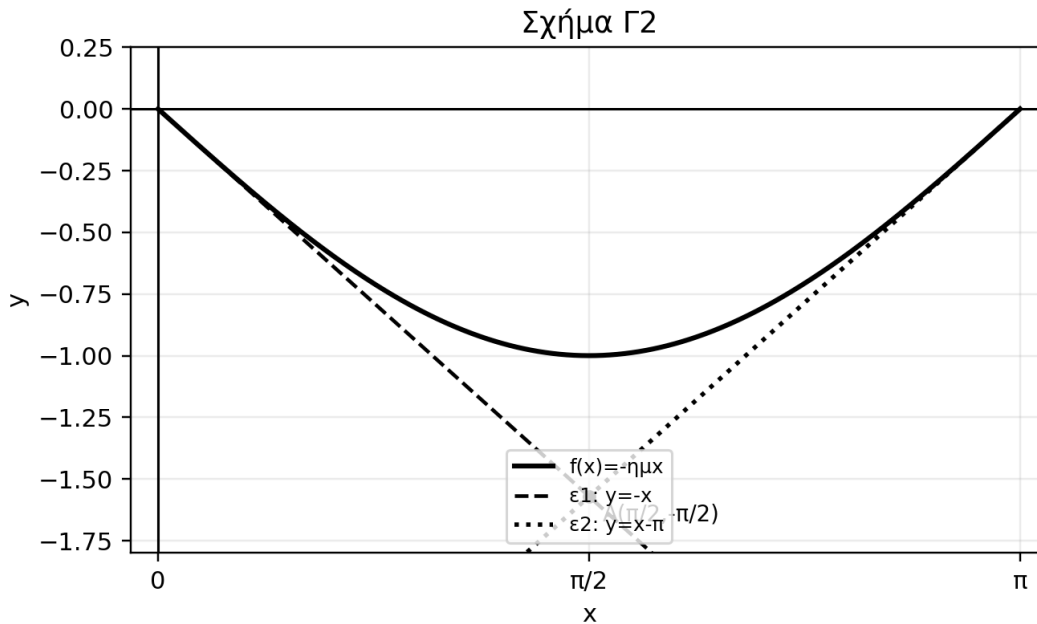
Για $t=\pi$:

$$f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = 1 \Rightarrow y = x - \pi$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες είναι:

$$\varepsilon_1: y = -x, \quad \varepsilon_2: y = x - \pi$$

Γ2. Εμβαδά



Το εμβαδόν E_2 είναι το εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x' . Επειδή $f(x) = -\eta\mu x \leq 0$ στο $[0, \pi]$, έχουμε:

$$E_2 = \int_0^\pi |-\eta\mu x| dx = \int_0^\pi \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\eta x]_0^\pi = 2$$

Για το E_1 , στο $[0, \pi/2]$ το χωρίο βρίσκεται ανάμεσα στην f και την ευθεία $y = -x$, ενώ στο $[\pi/2, \pi]$ ανάμεσα στην f και την ευθεία $y = x - \pi$.

$$E_1 = \int_0^{\pi/2} [-\eta\mu x - (-x)] dx + \int_{\pi/2}^{\pi} [-\eta\mu x - (x - \pi)] dx$$

$$E_1 = \int_0^{\pi/2} (x - \eta\mu x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x - \eta\mu x) dx$$

Λόγω συμμετρίας τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα, άρα:

$$E_1 = 2 \int_0^{\pi/2} (x - \eta\mu x) dx$$

$$E_1 = 2 \left[\frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\eta x \right]_0^{\pi/2} = 2 \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Επομένως:

$$E_1/E_2 = (\pi^2/4 - 2)/2 = \pi^2/8 - 1$$

Γ3. Υπολογισμός ορίου

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{[f(x) + x]}{[f(x) - x + \pi]}$$

Θέτουμε $t = \pi - x$, οπότε $t \rightarrow 0^+$ και $x = \pi - t$. Τότε:

$$f(x) = -\eta\mu(\pi - t) = -\eta\mu t$$

$$f(x) + x = -\eta\mu t + \pi - t \rightarrow \pi$$

$$f(x) - x + \pi = -\eta\mu t - (\pi - t) + \pi = t - \eta\mu t$$

Επειδή για $t > 0$ ισχύει $\eta\mu t < t$, έχουμε $t - \eta\mu t > 0$ και $t - \eta\mu t \rightarrow 0^+$. Άρα:

$$L = +\infty$$

Γ4. Απόδειξη ανισότητας

Για $x \in [1, e]$ ισχύει $x > 0$ και $\eta \mu x \leq 1$. Άρα:

$$-\eta \mu x \geq -1$$

Διαιρώντας με $x > 0$:

$$f(x)/x = -\eta \mu x/x \geq -1/x$$

Ολοκληρώνουμε στο $[1, e]$:

$$\int_1^e f(x)/x \, dx \geq \int_1^e (-1/x) \, dx = -[\ln x]_1^e = -1$$

Επειδή $\pi > e$, έχουμε:

$$-1 > e - 1 - \pi$$

Άρα:

$$\int_1^e f(x)/x \, dx > e - 1 - \pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται:

$$f(x) = \{ \sqrt[3]{x^4}, x \in [-1, 0); e^x \eta \mu x, x \in [0, \pi] \}$$

Δ1. Συνέχεια και κρίσιμα σημεία

Στα διαστήματα $[-1, 0)$ και $[0, \pi]$ οι τύποι $\sqrt[3]{x^4}$ και $e^x \eta \mu x$ είναι συνεχείς. Ελέγχουμε μόνο το σημείο αλλαγής τύπου $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$f(0) = e^0 \eta \mu 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \eta \mu x = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0. Συνεπώς είναι συνεχής σε όλο το $[-1, \pi]$.

Παράγωγος για $x \in (-1, 0)$:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} = |x|^{4/3} = (-x)^{4/3}$$

$$f'(x) = -(4/3)(-x)^{1/3} < 0$$

Παράγωγος για $x \in (0, \pi)$:

$$f'(x) = (e^x \eta \mu x)' = e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$$

Στο $x=0$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη, γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0, \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$$

Άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο.

Για $x \in (0, \pi)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 0$$

$$\eta \mu x = -\sigma \upsilon \nu x \Leftrightarrow \epsilon \varphi x = -1 \Leftrightarrow x = 3\pi/4$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$x=0, \quad x=3\pi/4$$

Δ2. Μονοτονία, ακρότατα, σύνολο τιμών

Στο $(-1, 0)$ ισχύει $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$.

Στο $(0, \pi)$, το πρόσημο της $f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$ εξαρτάται από το $\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$.

- Για $x \in (0, 3\pi/4)$: $\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x > 0$, άρα $f'(x) > 0$.
- Για $x \in (3\pi/4, \pi)$: $\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x < 0$, άρα $f'(x) < 0$.

Επομένως η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$,
- γνησίως αύξουσα στο $[0, 3\pi/4]$,
- γνησίως φθίνουσα στο $[3\pi/4, \pi]$.

Τιμές στα βασικά σημεία:

$$f(-1) = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(3\pi/4) = e^{\{3\pi/4\}} \cdot \eta\mu(3\pi/4) = e^{\{3\pi/4\}} \cdot \sqrt{2}/2$$

$$f(\pi) = e^{\pi} \cdot \eta\mu\pi = 0$$

Άρα:

- Ολικό ελάχιστο: $f(0) = f(\pi) = 0$.
- Τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ με τιμή 1, με τη συνήθη έννοια άκρου του πεδίου ορισμού.
- Ολικό μέγιστο στο $x = 3\pi/4$ με τιμή $e^{\{3\pi/4\}} \sqrt{2}/2$.

Το σύνολο τιμών είναι:

$$f([-1, \pi]) = [0, e^{\{3\pi/4\}} \sqrt{2}/2]$$

Δ3. Εμβαδόν χωρίου

Στο $[0, \pi]$ έχουμε $f(x) = e^x \eta\mu x$ και $g(x) = e^{\{5x\}}$. Επειδή $e^{\{5x\}} > 0$ και $g(x) > f(x)$ στο $[0, \pi]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^\pi [e^{\{5x\}} - e^x \eta\mu x] dx$$

Υπολογίζουμε:

$$\int_0^\pi e^{\{5x\}} dx = [e^{\{5x\}}/5]_0^\pi = (e^{\{5\pi\}} - 1)/5$$

Γνωστό ολοκλήρωμα:

$$\int e^x \eta\mu x dx = e^x (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)/2$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx &= [e^x (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)/2]_0^\pi \\ &= e^\pi (0 - (-1))/2 - 1(0 - 1)/2 = e^\pi/2 + 1/2 = (e^\pi + 1)/2 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$E = (e^{\{5\pi\}} - 1)/5 - (e^\pi + 1)/2$$

Δ4. Εξίσωση

$$16e^{\{-3\pi/4\}} f(x) - e^{\{-3\pi/4\}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε με $e^{\{3\pi/4\}} > 0$:

$$16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} e^{\{3\pi/4\}}$$

Από το Δ2 γνωρίζουμε ότι:

$$f(x) \leq f(3\pi/4) = e^{\{3\pi/4\}} \sqrt{2}/2$$

Άρα:

$$16f(x) \leq 16 \cdot e^{\{3\pi/4\}} \sqrt{2}/2 = 8\sqrt{2} e^{\{3\pi/4\}}$$

Επιπλέον:

$$(4x - 3\pi)^2 \geq 0$$

Οπότε:

$$16f(x) - (4x-3\pi)^2 \leq 8\sqrt{2} e^{\{3\pi/4\}}$$

Για να ισχύει η εξίσωση, πρέπει να έχουμε ταυτόχρονα ισότητα και στις δύο παραπάνω ανισότητες:

$$f(x)=e^{\{3\pi/4\}}\sqrt{2}/2 \text{ και } (4x-3\pi)^2=0$$

Η δεύτερη δίνει:

$$4x-3\pi=0 \Rightarrow x=3\pi/4$$

Η τιμή αυτή πράγματι δίνει το ολικό μέγιστο της f . Άρα η μοναδική λύση είναι:

$$x=3\pi/4$$