

Αναλυτικές Λύσεις

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου - Πανελλαδικές 2018

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη: παραγωγισιμότητα $\Rightarrow$ συνέχεια

Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Τότε υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] / (x - x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Για $x \neq x_0$ γράφουμε:

$$f(x) - f(x_0) = [(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0)] \cdot (x - x_0)$$

Παίρνοντας όριο για $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο x_0 .

A2. Ισχυρισμός για 1-1 και μονοτονία

Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

Αντιπαράδειγμα στο $\mathbb{R}$: θεωρούμε τη συνάρτηση που προκύπτει από την ταυτοτική $f(x)=x$, αν απλώς ανταλλάξουμε τις τιμές στα σημεία 0 και 1:

$$f(0)=1, \quad f(1)=0, \quad f(x)=x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$$

Η f είναι 1-1, γιατί είναι ουσιαστικά η ταυτοτική συνάρτηση με ανταλλαγή δύο τιμών. Όμως δεν είναι γνησίως μονότονη.

Δεν είναι γνησίως αύξουσα, αφού $0 < 1/2$ αλλά:

$$f(0)=1 > 1/2 = f(1/2)$$

Δεν είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $-1 < 0$ αλλά:

$$f(-1)=-1 < 1 = f(0)$$

Συνεπώς υπάρχει 1-1 συνάρτηση που δεν είναι γνησίως μονότονη, άρα ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

A3. Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και F είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$, δηλαδή $F'(x)=f(x)$, τότε:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

A4. Σωστό - Λάθος

α) Λάθος. Η ημχ έχει άπειρες θέσεις ολικού μεγίστου: $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

β) Λάθος. Μια παραγωγίσιμη γνησίως αύξουσα συνάρτηση μπορεί να έχει $f'(x)=0$ σε κάποια σημεία. Παράδειγμα $f(x)=x^3$, όπου $f'(0)=0$.

γ) Σωστό. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)/x = 0$, αφού $1 - \sin x \sim x^2/2$.

δ) Σωστό. Οι γραφικές παραστάσεις f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς $y=x$.

ε) Σωστό. Από τον ορισμό της συνάρτησης, σε κάθε x αντιστοιχεί το πολύ μία τιμή y .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται:

$$f(x) = x^2 - 4/x, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

B1. Μονοτονία και τοπικά ακρότατα

$$f'(x) = 2x + 4/x^2 = [2x^3 + 4]/x^2 = 2(x^3 + 2)/x^2$$

Επειδή $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$, το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζεται από το $x^3 + 2$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$$

Διάστημα	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
Πρόσημο $f'(x)$	-	0	+	+
Μονοτονία f	γνησίως φθίνουσα	τοπικό ελάχιστο	γνησίως αύξουσα	γνησίως αύξουσα

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ και γνησίως αύξουσα στα $(-\sqrt[3]{2}, 0)$, $(0, +\infty)$.

Στο $x = -\sqrt[3]{2}$ η παράγωγος αλλάζει από αρνητική σε θετική, άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο:

$$f(-\sqrt[3]{2}) = (-\sqrt[3]{2})^2 - 4/(-\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4} + 4/\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$$

Δεν υπάρχει τοπικό μέγιστο.

B2. Κυρτότητα και σημεία καμπής

$$f''(x) = 2 - 8/x^3 = 2(x^3 - 4)/x^3$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

Διάστημα	$(-\infty, 0)$	$(0, \sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4}, +\infty)$
Πρόσημο $f''(x)$	+	-	0	+
Συμπέρασμα	κυρτή	κοίλη	σημείο καμπής	κυρτή

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και στο $(\sqrt[3]{4}, +\infty)$, ενώ είναι κοίλη στο $(0, \sqrt[3]{4})$.

Στο $x = \sqrt[3]{4}$ η f'' αλλάζει πρόσημο, άρα υπάρχει σημείο καμπής:

$$f(\sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{4})^2 - 4/\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{16} = 0$$

Επομένως το σημείο καμπής είναι $K(\sqrt[3]{4}, 0)$.

B3. Ασύμπτωτες

Κατακόρυφη ασύμπτωτη: εξετάζουμε το $x=0$, επειδή δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 4/x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 4/x) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Οριζόντια ασύμπτωτη δεν υπάρχει, επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

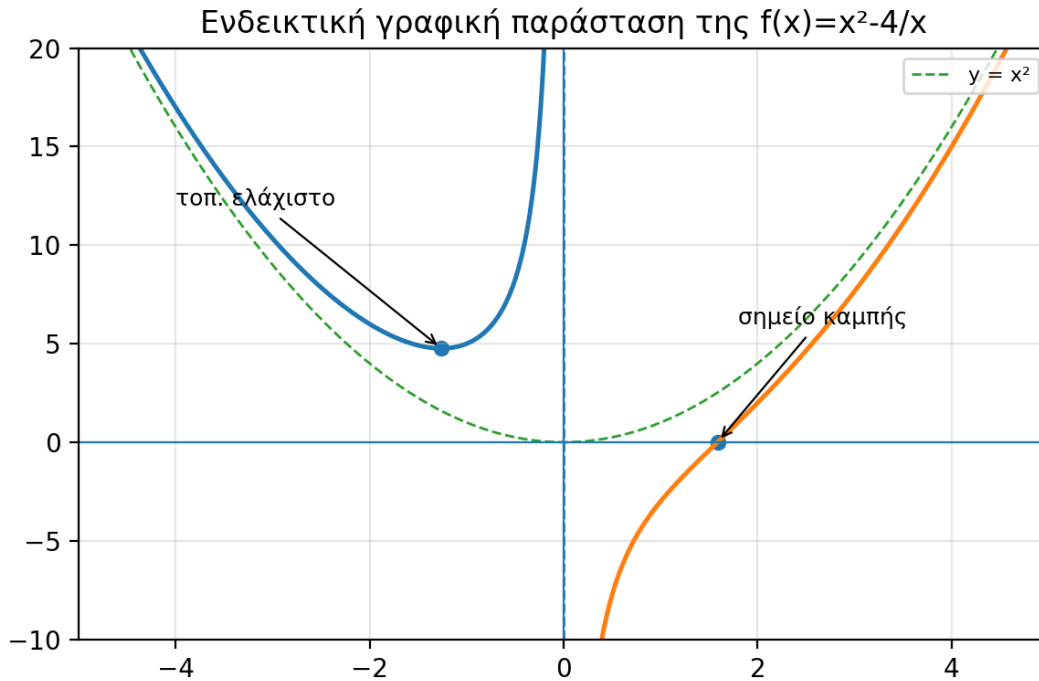
Πλάγια ασύμπτωτη επίσης δεν υπάρχει, αφού:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - 4/x^2)$$

το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός. Παρατήρηση για τη χάραξη: ισχύει $f(x) - x^2 = -4/x \rightarrow 0$, άρα η γραφική πλησιάζει την παραβολή $y = x^2$ για $|x| \rightarrow \infty$. Αυτό δεν είναι ευθύγραμμη ασύμπτωτη, αλλά βοηθά πολύ στο σχήμα.

Β4. Γραφική παράσταση

Για τη χάραξη χρησιμοποιούμε τα συμπεράσματα: πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^*$, κατακόρυφη ασύμπτωτη $x=0$, τοπικό ελάχιστο στο $x=-\sqrt[3]{4}$, σημείο καμπής $K(\sqrt[3]{4},0)$, μονοτονία και κυρτότητα όπως παραπάνω.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τύπος του αθροίσματος εμβαδών

Το τμήμα μήκους x m γίνεται τετράγωνο. Άρα η πλευρά του είναι $x/4$ και το εμβαδόν του:

$$E_{\text{τετρ}} = (x/4)^2 = x^2/16$$

Το υπόλοιπο σύρμα έχει μήκος $8-x$ και γίνεται κύκλος. Άρα:

$$2\pi r = 8-x \Rightarrow r = (8-x)/(2\pi)$$

Το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$E_{\text{κυκλ}} = \pi r^2 = \pi [(8-x)/(2\pi)]^2 = (8-x)^2/(4\pi)$$

Επομένως το συνολικό εμβαδόν είναι:

$$E(x) = x^2/16 + (8-x)^2/(4\pi)$$

$$E(x) = [\pi x^2 + 4(x^2 - 16x + 64)]/(16\pi) = [(\pi+4)x^2 - 64x + 256]/(16\pi), \quad x \in (0,8)$$

Γ2. Ελαχιστοποίηση

$$E'(x) = [2(\pi+4)x - 64]/(16\pi) = [(\pi+4)x - 32]/(8\pi)$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 32/(\pi+4)$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 στον τύπο της E είναι θετικός, η E είναι κυρτή παραβολή. Άρα στο x_0 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι:

$$\text{πλευρά} = x_0/4 = 8/(\pi+4)$$

Η διάμετρος του κύκλου είναι:

$$\text{διάμετρος} = 2r = (8-x_0)/\pi = [8-32/(\pi+4)]/\pi = [8\pi/(\pi+4)]/\pi = 8/(\pi+4)$$

Άρα το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Μοναδικός τρόπος ώστε $E(x)=5$

Η E είναι συνεχής στο $(0,8)$. Από το Γ2 γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(x_0,8)$, όπου $x_0=32/(\pi+4)$.

Στο αριστερό άκρο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = 16/\pi > 5, \text{ αφού } \pi < 16/5$$

Στο ελάχιστο έχουμε τιμή μικρότερη από 5, αφού $\pi < 4 \Rightarrow$

$$E(x_0) = 16/(\pi+4) < 16/\pi \text{ και ειδικά } E(x_0) < 5$$

Πιο άμεσα: για $x=4$ έχουμε

$$E(4) = 1+4/\pi < 5$$

Επίσης $x_0 > 4$, επειδή $\pi+4 < 8$. Στο $x=4$ έχουμε:

$$E(4) = 1+4/\pi < 5$$

Άρα, λόγω συνέχειας, υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της $E(x)=5$ στο $(0,4)$. Επειδή $(0,4) \subset (0,x_0)$ και η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0)$, αυτή η λύση είναι μοναδική στο $(0,x_0)$.

Μένει να αποκλείσουμε δεύτερη λύση στο $(4,8)$. Στο διάστημα $[4,8]$ η E πρώτα φθίνει μέχρι το x_0 και μετά αυξάνει. Επομένως η μέγιστη τιμή της στο $[4,8]$ βρίσκεται σε ένα από τα άκρα.

$$E(4) = 1+4/\pi < 5, \quad E(8) = 4 < 5$$

Άρα για κάθε $x \in (4,8)$ ισχύει $E(x) < 5$. Δεν υπάρχει δεύτερη λύση.

Συνεπώς υπάρχει ένας μόνο τρόπος κοπής του σύρματος ώστε το άθροισμα των εμβαδών να είναι 5 m^2 .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται:

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 1$$

$$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$$

$$f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$$

$$f'''(x) = 2e^{x-\alpha} > 0$$

Δ1. Μοναδικό σημείο καμπής

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow x = \alpha$$

Επειδή $f''(x) < 0$ για $x < \alpha$ και $f''(x) > 0$ για $x > \alpha$, η κυρτότητα αλλάζει στο $x = \alpha$.

Άρα η γραφική παράσταση έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής:

$$\Sigma(\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, 2-\alpha^2)$$

Δ2. Μοναδικό τοπικό μέγιστο και μοναδικό τοπικό ελάχιστο

Θέλουμε τα κρίσιμα σημεία της f :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2x=0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=x$$

Θεωρούμε:

$$g(x)=e^{x-\alpha}-x$$

Τότε:

$$g'(x)=e^{x-\alpha}-1$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha)$ και γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, +\infty)$. Επιπλέον:

$$g(\alpha)=1-\alpha<0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)=+\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)=+\infty$$

Άρα, με το Θεώρημα Bolzano και τη μονοτονία, η g έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με:

$$x_1 < \alpha < x_2$$

Επομένως $f'(x)=2g(x)$ έχει πρόσημο +, -, + στα διαστήματα που ορίζονται από τις ρίζες.

Διάστημα	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
Πρόσημο $f'(x)$	+	0	-	0	+
Συμπέρασμα	αύξουσα	τοπικό μέγιστο	φθίνουσα	τοπικό ελάχιστο	αύξουσα

Άρα υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3. Αδυναμία της εξίσωσης $f(x)=f(1)$ στο (α, x_2)

Έχουμε:

$$g(1)=e^{1-\alpha}-1<0, \text{ επειδή } \alpha>1$$

Άρα το 1 βρίσκεται ανάμεσα στις δύο ρίζες της g, δηλαδή:

$$x_1 < 1 < \alpha < x_2$$

Στο διάστημα (x_1, x_2) ισχύει $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα εκεί.

Για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ έχουμε $x>1$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (x_1, x_2) , προκύπτει:

$$f(x)<f(1)$$

Άρα δεν μπορεί να ισχύει $f(x)=f(1)$ για κανένα $x \in (\alpha, x_2)$. Η εξίσωση είναι αδύνατη στο διάστημα αυτό.

Δ4. Απόδειξη της ανισότητας για $\alpha=2$

Για $\alpha=2$ έχουμε:

$$f(x)=2e^{x-2}-x^2$$

Στο διάστημα $[2, 3]$ ισχύει $x-2 \geq 0$. Από τη γνωστή ανισότητα $e^u > 1+u$ για $u>0$ παίρνουμε, για $x \in (2, 3]$:

$$e^{x-2} > 1+(x-2)=x-1$$

Άρα:

$$f(x)=2e^{x-2}-x^2 > 2(x-1)-x^2 = -(x-1)^2$$

Επειδή $\sqrt{x-2} \geq 0$ στο $[2, 3]$, πολλαπλασιάζουμε χωρίς αλλαγή φοράς:

$$f(x)\sqrt{x-2} > -(x-1)^2\sqrt{x-2}$$

Ολοκληρώνουμε από 2 έως 3:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} \, dx > -\int_2^3 (x-1)^2\sqrt{x-2} \, dx$$

Θέτουμε $t=x-2$. Τότε $x=t+2$, $x-1=t+1$, $dx=dt$ και τα όρια γίνονται 0 έως 1.

$$\begin{aligned}\int_2^3 (x-1)^2\sqrt{x-2} \, dx &= \int_0^1 (t+1)^2\sqrt{t} \, dt \\&= \int_0^1 (t^2+2t+1)t^{1/2} \, dt \\&= \int_0^1 (t^{5/2}+2t^{3/2}+t^{1/2}) \, dt \\&= [2/7 t^{7/2}+4/5 t^{5/2}+2/3 t^{3/2}]_0^1 \\&= 2/7+4/5+2/3 = 184/105\end{aligned}$$

Άρα:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} \, dx > -184/105$$

Τέλος συγκρίνουμε:

$$184/105 < 32/15, \text{ αφού } 184 \cdot 15 = 2760 < 3360 = 32 \cdot 105$$

Επομένως:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} \, dx > -184/105 > -32/15$$

Άρα αποδείχθηκε η ζητούμενη ανισότητα.