

Αναλυτικές λύσεις

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Πανελλαδικές 2019 - Κανονικές

ΘΕΜΑ Α

A1. Ορισμοί

α) Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ονομάζουμε μια διαδικασία/αντιστοίχιση f , με την οποία κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο ένα πραγματικό αριθμό y . Ο αριθμός αυτός λέγεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται $f(x)$.

β i) Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow R$ έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1, δηλαδή όταν διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού έχουν διαφορετικές εικόνες:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ισοδύναμα: αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $x_1=x_2$.

β ii) Αν η f είναι 1-1, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$. Για κάθε $y \in f(A)$, η $f^{-1}(y)$ είναι το μοναδικό $x \in A$ για το οποίο $f(x)=y$.

$$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y.$$

A2. Θεώρημα Fermat

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ , στο οποίο είναι παραγωγίσιμη, τότε:

$$f'(x_0)=0.$$

Προσοχή: το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή από $f'(x_0)=0$ δεν συμπεραίνουμε υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο.

A3. Απόδειξη μονοτονίας από θετική παράγωγο

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$(f(x_2)-f(x_1))/(x_2-x_1)=f'(\xi).$$

Από την υπόθεση έχουμε $f'(\xi) > 0$. Επειδή $x_2-x_1 > 0$, προκύπτει:

$$f(x_2)-f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Άρα για κάθε $x_1 < x_2$ στο Δ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

A4. Σωστό - Λάθος με αιτιολόγηση

α) Λάθος.

Το $A=(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι διάστημα, αλλά ένωση δύο ξένων διαστημάτων. Από $f'(x)=0$ σε κάθε σημείο του A συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή σε καθένα από τα δύο διαστήματα ξεχωριστά, όχι υποχρεωτικά σε όλο το A .

Αντιπαράδειγμα:

$$f(x)=1 \text{ για } x < 0, \quad f(x)=2 \text{ για } x > 0.$$

Τότε $f'(x)=0$ για κάθε $x \in A$, αλλά η f δεν είναι σταθερή στο A .

β) Λάθος.

Η ύπαρξη του ορίου της f στο x_0 δεν επιβάλλει το όριο να είναι ίσο με $f(x_0)$. Αυτό ισχύει μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0 .

Αντιπαράδειγμα:

$$f(x)=0 \text{ για } x \neq 0, \quad f(0)=1.$$

Τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$, αλλά $f(0)=1$.

A5. Ορισμένο ολοκλήρωμα από εμβαδά

Το ολοκλήρωμα ισούται με αλγεβρικό εμβαδόν: τα χωρία πάνω από τον άξονα x μετρούν θετικά, ενώ τα χωρία κάτω από τον άξονα μετρούν αρνητικά.

$$\int_{[\alpha, \delta]} f(x) dx = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = 2 - 1 + 3 = 4.$$

Σωστή απάντηση: γ) 4.

ΘΕΜΑ Β

B1. Εύρεση λ

Δίνεται:

$$f(x)=e^{(-x)}+\lambda.$$

Η οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι το όριο της f όταν $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(-x)}=0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{(-x)}+\lambda)=\lambda.$$

Αφού η οριζόντια ασύμπτωτη είναι $y=2$, πρέπει:

$$\lambda=2.$$

Άρα:

$$f(x)=e^{(-x)}+2.$$

B2. Μοναδική ρίζα της $f(x)-x=0$ στο $(2,3)$

Θέτουμε:

$$h(x)=f(x)-x=e^{(-x)}+2-x.$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Υπολογίζουμε στα άκρα του διαστήματος:

$$h(2)=e^{(-2)}+2-2=e^{(-2)}>0,$$

$$h(3)=e^{(-3)}+2-3=e^{(-3)}-1<0.$$

Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,3)$.

Για τη μοναδικότητα, παραγωγίζουμε:

$$h'(x)=-e^{(-x)}-1<0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε μπορεί να έχει το πολύ μία ρίζα. Εφόσον έχει τουλάχιστον μία στο $(2,3)$, έχει ακριβώς μία ρίζα και αυτή βρίσκεται στο $(2,3)$.

B3. 1-1 και αντίστροφη

Έχουμε:

$$f'(x)=-e^{(-x)}<0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι 1-1.

Για να βρούμε την αντίστροφη, θέτουμε $y=f(x)$:

$$y=e^{(-x)}+2$$

$$y-2=e^{(-x)}, \quad y>2$$

$$\ln(y-2)=-x$$

$$x=-\ln(y-2).$$

Άρα, αλλάζοντας το y σε x :

$$f^{-1}(x)=-\ln(x-2), \quad x>2.$$

B4. Ασύμπτωτη και πρόχειρη γραφική παράσταση

Η αντίστροφη είναι:

$$f^{-1}(x)=-\ln(x-2), \quad x>2.$$

Για την κατακόρυφη ασύμπτωτη εξετάζουμε το όριο όταν $x \rightarrow 2^+$:

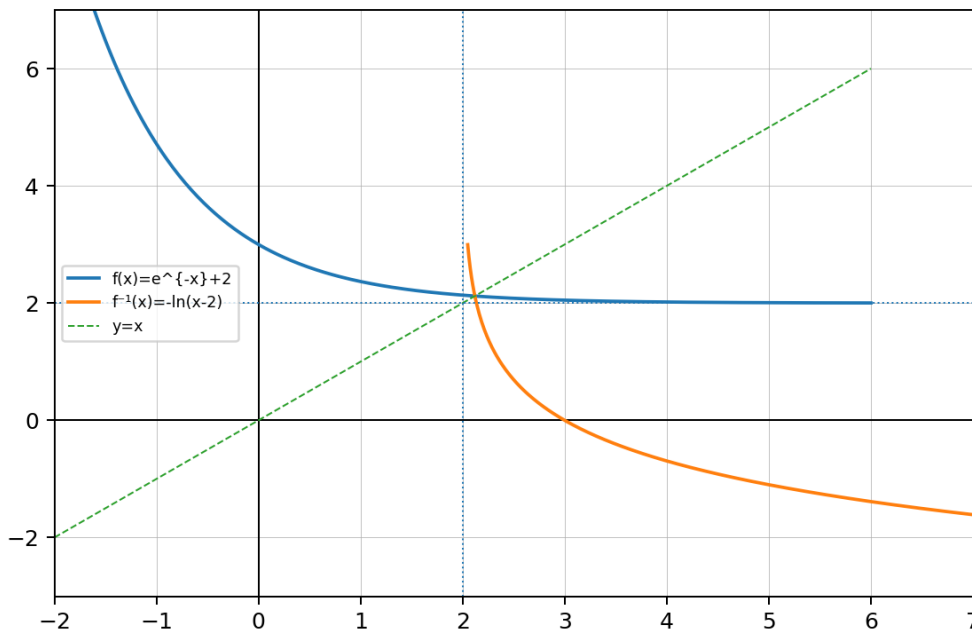
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)=0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2)=-\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -\ln(x-2)=+\infty.$$

Άρα η κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1} είναι:

$$x=2.$$

Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη $y=2$ στο $+\infty$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εύρεση α και β

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής στο $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x \geq 1 \\ e^{(x-1)}+\beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Συνέχεια στο $x=1$:

$$f(1)=1^2+\alpha=1+\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=e^0+\beta \cdot 1=1+\beta$$

$$1+\alpha=1+\beta \Rightarrow \alpha=\beta. \quad (1)$$

Παραγωγισιμότητα στο $x=1$:

$$\text{Για } x>1: f'(x)=2x \Rightarrow f'_+(1)=2.$$

$$\text{Για } x<1: f'(x)=e^{(x-1)}+\beta \Rightarrow f'_-(1)=1+\beta.$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, ισχύει:

$$1+\beta=2 \Rightarrow \beta=1.$$

Από την (1) παίρνουμε:

$$\alpha=1.$$

Γ2. Μονοτονία και σύνολο τιμών

Με $\alpha=\beta=1$ έχουμε:

$$f(x)=\{x^2+1, x \geq 1; e^{(x-1)}+x, x < 1\}.$$

Για $x<1$:

$$f'(x)=e^{(x-1)}+1>0.$$

Για $x>1$:

$$f'(x)=2x>0, \text{ επειδή } x>1.$$

Επιπλέον, η f είναι συνεχής στο $x=1$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για το σύνολο τιμών:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{(x-1)}+x)=-\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1)=+\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Άρα:

$$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}.$$

Γ3. Ρίζα και αδυναμία εξίσωσης

i) Από το Γ2 η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών $\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 .

Για να δείξουμε ότι είναι αρνητική, υπολογίζουμε:

$$f(0)=e^{(-1)}+0=e^{(-1)}>0.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(x_0)=0<f(0)$, έχουμε:

$$x_0<0.$$

ii) Η εξίσωση είναι:

$$f^2(x)-x_0 f(x)=0.$$

Παραγοντοποιούμε:

$$f(x)[f(x)-x_0]=0.$$

Για $x \in (x_0, +\infty)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(x_0)=0$, ισχύει:

$$f(x)>f(x_0)=0.$$

Επίσης, επειδή $x_0<0$, έχουμε:

$$f(x)-x_0>0-x_0>0.$$

Άρα και οι δύο παράγοντες είναι θετικοί, οπότε το γινόμενο δεν μπορεί να είναι 0. Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Ρυθμός μεταβολής εμβαδού

Το σημείο $M(x,y)$ κινείται στην καμπύλη $y=f(x)$, με $x \geq 1$. Άρα:

$$y=x^2+1.$$

Τη στιγμή t_0 περνά από το $A(3,10)$, άρα $x=3$ και $y=10$. Δίνεται:

$$dx/dt=2.$$

Το τρίγωνο $ΜΟΚ$ έχει βάση $ΟΚ=x$ και ύψος y , άρα το εμβαδόν του είναι:

$$E=(1/2)xy.$$

Παραγωγίζουμε ως προς t :

$$dE/dt=(1/2)(x \cdot dy/dt + y \cdot dx/dt).$$

Επειδή $y=x^2+1$:

$$dy/dt=2x \cdot dx/dt.$$

Στη στιγμή t_0 , για $x=3$ και $dx/dt=2$:

$$dy/dt=2 \cdot 3 \cdot 2=12.$$

Άρα:

$$dE/dt=(1/2)(3 \cdot 12 + 10 \cdot 2) = (1/2)(36+20)=28.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι 28 τετραγωνικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εύρεση α και β

Δίνεται:

$$f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta.$$

Η ευθεία $\varepsilon: y=-x+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο $A(1,1)$. Άρα:

$$f(1)=1 \text{ και } f'(1)=-1.$$

Υπολογίζουμε:

$$f(1)=(1-1)\ln(1^2-2 \cdot 1+2)+\alpha+\beta=\alpha+\beta.$$

$$\text{Άρα } \alpha+\beta=1. \quad (1)$$

Παράγωγος:

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1) \cdot (2x-2)/(x^2-2x+2)+\alpha.$$

Στο $x=1$:

$$f'(1)=\ln 1+0+\alpha=\alpha.$$

Επειδή $f'(1)=-1$, παίρνουμε:

$$\alpha=-1.$$

Από την (1):

$$-1+\beta=1 \Rightarrow \beta=2.$$

Δ2. Εμβαδόν χωρίου

Με $\alpha=-1$ και $\beta=2$:

$$f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2.$$

Η ευθεία είναι:

$$\varepsilon(x) = -x + 2.$$

Η διαφορά είναι:

$$f(x) - \varepsilon(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2).$$

Στο $[1, 2]$ ισχύει $x-1 \geq 0$ και $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$, άρα $\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$. Επομένως $f(x) \geq \varepsilon(x)$ στο $[1, 2]$.

Το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{[1, 2]} (f(x) - \varepsilon(x)) dx = \int_{[1, 2]} (x-1)\ln((x-1)^2 + 1) dx.$$

Θέτουμε:

$$u = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow du = 2(x-1) dx.$$

Όταν $x=1$, $u=1$. Όταν $x=2$, $u=2$. Άρα:

$$E = (1/2) \int_{[1, 2]} \ln u \, du.$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u.$$

$$E = (1/2) [u \ln u - u]_1^2$$

$$E = (1/2) [(2 \ln 2 - 2) - (1 \ln 1 - 1)]$$

$$E = (1/2) (2 \ln 2 - 2 + 1) = \ln 2 - 1/2.$$

Δ3. Ανισότητες

i) Έχουμε:

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot (2x-2)/(x^2 - 2x + 2) - 1.$$

Επειδή:

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0,$$

$$((x-1)(2x-2))/(x^2 - 2x + 2) = 2(x-1)^2/((x-1)^2 + 1) \geq 0,$$

προκύπτει:

$$f'(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Από το (i), για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(t) \geq -1$. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα με άκρα λ και $\lambda + 1/2$.

Υπάρχει ξ μεταξύ των δύο άκρων τέτοιο ώστε:

$$f(\lambda + 1/2) - f(\lambda) = f'(\xi) \cdot (1/2).$$

Αφού $f'(\xi) \geq -1$:

$$f(\lambda + 1/2) - f(\lambda) \geq -1/2$$

$$f(\lambda + 1/2) \geq f(\lambda) - 1/2.$$

Προσθέτουμε λ στα δύο μέλη:

$$f(\lambda + 1/2) + \lambda \geq f(\lambda) + \lambda - 1/2.$$

Υπολογίζουμε την $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = (\lambda-1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2.$$

Άρα:

$$f(\lambda) + \lambda - 1/2 = (\lambda-1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 3/2.$$

Επομένως:

$$f(\lambda + 1/2) + \lambda \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 3/2, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δ4. Μοναδική κοινή εφαπτομένη των f και g

Δίνεται:

$$g(x) = -x^3 - x + 2.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της g:

$$g'(x) = -3x^2 - 1 \leq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Από το Δ3 έχουμε:

$$f'(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη, τότε η κοινή ευθεία πρέπει να έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης ως εφαπτομένη και στις δύο καμπύλες. Άρα πρέπει να υπάρχουν σημεία a, b τέτοια ώστε:

$$f'(a) = g'(b).$$

Όμως $f'(a) \geq -1$ και $g'(b) \leq -1$. Άρα η ισότητα μπορεί να γίνει μόνο όταν:

$$f'(a) = -1 \text{ και } g'(b) = -1.$$

Για την g:

$$g'(b) = -3b^2 - 1 = -1 \Rightarrow b = 0.$$

Για την f, από τον τύπο της παραγώγου:

$$f'(a) = \ln((a-1)^2 + 1) + 2(a-1)^2 / ((a-1)^2 + 1) - 1.$$

Για να είναι $f'(a) = -1$, πρέπει οι δύο μη αρνητικοί όροι να είναι και οι δύο μηδέν:

$$\ln((a-1)^2 + 1) = 0 \text{ και } 2(a-1)^2 / ((a-1)^2 + 1) = 0.$$

Αυτό δίνει:

$$(a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Άρα η κοινή εφαπτομένη, αν υπάρχει, μπορεί να είναι μόνο η εφαπτομένη της f στο $x=1$ και της g στο $x=0$.

Για τη f στο $x=1$:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -1.$$

$$y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2.$$

Για τη g στο $x=0$:

$$g(0) = 2, \quad g'(0) = -1.$$

$$y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 2.$$

Άρα η μοναδική κοινή εφαπτομένη είναι:

$$y = -x + 2.$$