

Αναλυτικές Λύσεις

Μαθηματικά Προσανατολισμού - Πανελλαδικές 2020 (Νέο Σύστημα)

Ημερήσια & Εσπερινά Γενικά Λύκεια

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε η μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \eta, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον:

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0, \quad g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$$

Άρα οι τιμές $g(\alpha)$, $g(\beta)$ είναι ετερόσημες. Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$$

Αν $f(\beta) < \eta < f(\alpha)$, η ίδια απόδειξη εφαρμόζεται με αντίστροφα πρόσημα. Επομένως, για κάθε η μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = \eta$.

Απάντηση: αποδείχθηκε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

A2. Παραγωγισιμότητα σε κλειστό διάστημα

Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν:

- είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του (α, β) ,
- υπάρχει η δεξιά παράγωγος στο α , δηλαδή $f'_+(\alpha)$,
- υπάρχει η αριστερή παράγωγος στο β , δηλαδή $f'_-(\beta)$.

Απάντηση: παραγωγισιμότητα στο εσωτερικό και μονόπλευρες παράγωγοι στα άκρα.

A3. Ισχυρισμός για γνησίως αύξουσα παραγωγίσιμη συνάρτηση

Ισχυρισμός: «Για κάθε συνάρτηση f , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$ ».

Ο ισχυρισμός είναι ψευδής. Αντιπαράδειγμα:

$$f(x) = x^3$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Όμως:

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0$$

Άρα δεν ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Ψευδής.

A4. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Χαρακτηρισμός	Αιτιολόγηση
α	Λάθος	Για $x \rightarrow 0$, η παράσταση $1/x^{2n+1}$ έχει δεξιό όριο $+\infty$ και αριστερό όριο $-\infty$. Άρα το διπλό όριο δεν είναι $+\infty$.
β	Σωστό	Η $g \circ f$ ορίζεται όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ με $f(x) \in B$, δηλαδή όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
γ	Σωστό	Η $f(x) = \sqrt{ x }$ είναι άρτια, αφού $f(-x) = \sqrt{ -x } = \sqrt{ x } = f(x)$. Άρα έχει άξονα συμμετρίας τον y' .
δ	Σωστό	Η εικόνα διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα. Αν η συνάρτηση δεν είναι σταθερή, η εικόνα είναι μη εκφυλισμένο διάστημα.
ε	Σωστό	Η απόσταση από τον άξονα x' είναι $f(x)$, αφού η γραφική παράσταση είναι πάνω από τον άξονα. Σε σημείο μέγιστης ή ελάχιστης τιμής παραγωγίσιμης συνάρτησης στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x_0) = 0$, άρα η εφαπτομένη είναι οριζόντια.

ΘΕΜΑ Β

B1. Προσδιορισμός της $f \circ g$

Δίνονται:

$$f(x) = (x+2)/(x-1), \quad x > 1 \quad \text{και} \quad g(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για να ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$, πρέπει $g(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , δηλαδή:

$$g(x) > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το $(0, +\infty)$. Για $x > 0$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x + 2)/(e^x - 1)$$

Απάντηση: $(f \circ g)(x) = (e^x + 2)/(e^x - 1)$, με $x > 0$.

B2. Απόδειξη 1-1 και αντίστροφη

Θέτουμε:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = (e^x + 2)/(e^x - 1), \quad x > 0$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$h'(x) = [e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 2)]/(e^x - 1)^2$$

$$h'(x) = [e^{2x} - e^x - e^{2x} - 2e^x]/(e^x - 1)^2 = -3e^x/(e^x - 1)^2 < 0$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως είναι 1-1.

Για την αντίστροφη, θέτουμε $y = h(x)$:

$$y = (e^x + 2)/(e^x - 1)$$

$$y(e^x - 1) = e^x + 2$$

$$ye^x - y = e^x + 2$$

$$(y-1)e^x = y+2$$

$$e^x = (y+2)/(y-1)$$

$$x = \ln((y+2)/(y-1))$$

Επίσης, επειδή h είναι φθίνουσα και:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

το σύνολο τιμών της είναι $(1, +\infty)$. Άρα η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το $(1, +\infty)$.

Απάντηση: $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln((x+2)/(x-1))$, με $x > 1$.

B3. Μονοτονία της ϕ

Δίνεται:

$$\phi(x) = \ln((x+2)/(x-1)), \quad x > 1$$

Θέτουμε $u(x) = (x+2)/(x-1)$. Τότε:

$$u'(x) = [(x-1) - (x+2)]/(x-1)^2 = -3/(x-1)^2$$

Άρα:

$$\phi'(x) = u'(x)/u(x) = [-3/(x-1)^2] / [(x+2)/(x-1)]$$

$$\phi'(x) = -3/[(x-1)(x+2)]$$

Για $x > 1$ έχουμε $x-1 > 0$ και $x+2 > 0$, άρα:

$$\phi'(x) < 0$$

Απάντηση: η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

B4. Όρια της ϕ

Για $x \rightarrow 1^+$:

$$(x+2)/(x-1) \rightarrow +\infty \Rightarrow \phi(x) = \ln((x+2)/(x-1)) \rightarrow +\infty$$

Για $x \rightarrow +\infty$:

$$(x+2)/(x-1) = (1+2/x)/(1-1/x) \rightarrow 1$$

$$\phi(x) \rightarrow \ln 1 = 0$$

Απάντηση: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(1-x) - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < 3\pi/2 \end{cases}, \lambda > 0$$

Γ1. Απόδειξη ότι $\lambda=1$

Η f είναι συνεχής στο 0. Άρα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{(x \rightarrow 0^-)} f(x) = f(0) = \lim_{(x \rightarrow 0^+)} f(x)$$

Από τον πρώτο κλάδο:

$$f(0) = 1/(1-0) - \ln \lambda = 1 - \ln \lambda$$

Από τον δεύτερο κλάδο:

$$\lim_{(x \rightarrow 0^+)} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 0 + \lambda \cdot 1 = \lambda$$

Άρα:

$$1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda + \ln \lambda = 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $q(\lambda) = \lambda + \ln \lambda$, με $\lambda > 0$. Έχουμε:

$$q'(\lambda) = 1 + 1/\lambda > 0$$

Άρα η q είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $q(1) = 1 + \ln 1 = 1$, η εξίσωση $q(\lambda) = 1$ έχει μοναδική λύση:

$$\lambda = 1$$

Απάντηση: $\lambda=1$.

Γ2. Εφαπτομένη στο $A(0,1)$ και γωνία $\pi/4$

Με $\lambda=1$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(1-x), & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

Πρώτα ελέγχουμε ότι το $A(0,1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση:

$$f(0) = 1/(1-0) = 1$$

Υπολογίζουμε τις μονόπλευρες παραγώγους στο 0.

Για $x < 0$:

$$f'(x) = 1/(1-x)^2 \Rightarrow f'_-(0) = 1$$

Για $x > 0$:

$$f'(x) = \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x \Rightarrow f'_+(0) = 1 - 0 = 1$$

Οι δύο μονόπλευρες παράγωγοι είναι ίσες, άρα η f παραγωγίζεται στο 0 και:

$$f'(0) = 1$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_e = f'(0) = 1$. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον x' , τότε:

$$\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$$

Απάντηση: ορίζεται εφαπτομένη στο $A(0,1)$ και σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα x' .

Γ3. Κρίσιμα σημεία της f

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία $f'(x)=0$ ή δεν υπάρχει η $f'(x)$.

Για $x < 0$:

$$f'(x) = 1/(1-x)^2 > 0$$

Άρα δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία στον κλάδο $x < 0$.

Στο $x=0$ υπάρχει παράγωγος και $f'(0)=1 \neq 0$, άρα το 0 δεν είναι κρίσιμο σημείο.

Για $0 < x < 3\pi/2$:

$$f'(x) = \sin x - \eta \mu x$$

Λύνουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \eta \mu x \Leftrightarrow \tan x = 1$$

$$x = \pi/4 + k\pi$$

Στο διάστημα $(0, 3\pi/2)$ παίρνουμε:

$$x = \pi/4 \text{ και } x = 5\pi/4$$

Οι αντίστοιχες τιμές είναι:

$$f(\pi/4) = \eta \mu(\pi/4) + \sigma \nu \nu(\pi/4) = \sqrt{2}$$

$$f(5\pi/4) = \eta \mu(5\pi/4) + \sigma \nu \nu(5\pi/4) = -\sqrt{2}$$

Απάντηση: κρίσιμα σημεία: $(\pi/4, \sqrt{2})$ και $(5\pi/4, -\sqrt{2})$.

Γ4. Ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του B

Το σημείο M έχει τετμημένη $\alpha \leq 0$, άρα χρησιμοποιούμε τον πρώτο κλάδο:

$$f(\alpha) = 1/(1-\alpha), \quad f'(\alpha) = 1/(1-\alpha)^2$$

Η εφαπτομένη της Cf στο $M(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Το σημείο B είναι τομή με τον άξονα $x'x$, άρα $y=0$. Αν η τετμημένη του B είναι x_B , τότε:

$$0 - f(\alpha) = f'(\alpha)(x_B - \alpha)$$

$$x_B = \alpha - f(\alpha)/f'(\alpha)$$

Αντικαθιστούμε:

$$x_B = \alpha - [1/(1-\alpha)] / [1/(1-\alpha)^2]$$

$$x_B = \alpha - (1-\alpha) = 2\alpha - 1$$

Άρα, ως συνάρτηση του χρόνου:

$$x_B(t) = 2\alpha(t) - 1$$

Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$x_B'(t) = 2\alpha'(t)$$

Δίνεται:

$$\alpha'(t) = -\alpha(t)/3$$

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $\alpha(t_0) = -1$, άρα:

$$\alpha'(t_0) = -(-1)/3 = 1/3$$

Επομένως:

$$xB'(t_0) = 2 \cdot (1/3) = 2/3$$

Απάντηση: ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του B είναι 2/3.

Mr. Spience

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται:

$$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Μοναδικό ολικό ελάχιστο και τιμή $f(x_0)$

Υπολογίζουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο:

$$f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ελέγχουμε τις τιμές της f' στα άκρα του $(0,1)$:

$$f'(0) = 1 - e < 0$$

$$f'(1) = e + 2 - e = 2 > 0$$

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = 0$$

Επομένως:

- για $x < x_0$ ισχύει $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα,
- για $x > x_0$ ισχύει $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο x_0 .

Από $f'(x_0) = 0$ έχουμε:

$$e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Rightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$$

Τότε:

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$$

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1$$

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Απάντηση: υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ όπου η f έχει ολικό ελάχιστο και $f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$.

Δ2. Υπολογισμός ορίου

Θέλουμε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$

Από το Δ1 η f έχει ολικό ελάχιστο στο x_0 . Άρα για κάθε $x \neq x_0$:

$$f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$$

Επιπλέον, επειδή f είναι συνεχής, όταν $x \rightarrow x_0$ έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) \rightarrow 0^+$$

Άρα:

$$\frac{1}{f(x) - f(x_0)} \rightarrow +\infty$$

Ο δεύτερος όρος είναι φραγμένος:

$$-1 \leq \eta\mu(1/(x-x_0)) \leq 1$$

Άθροισμα ποσότητας που τείνει στο $+\infty$ με φραγμένη ποσότητα τείνει στο $+\infty$.

Απάντηση: το όριο είναι $+\infty$.

Δ3. Μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)+x=x_0$ στο $(x_0,1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x)=f(x)+x-x_0, \quad x \in [x_0,1]$$

Η F είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0,1)$.

Έχουμε:

$$F(x_0)=f(x_0)$$

Επειδή $f(0)=0$ και το $x_0 \in (0,1)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου, ισχύει:

$$f(x_0) < f(0) = 0$$

Άρα:

$$F(x_0) < 0$$

Επίσης:

$$F(1)=f(1)+1-x_0$$

$$f(1)=e+1-e-1=0 \Rightarrow F(1)=1-x_0 > 0$$

Από Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (x_0,1)$.

Για τη μοναδικότητα, υπολογίζουμε:

$$F'(x)=f'(x)+1$$

Για $x \in (x_0,1)$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(x_0)=0$, έχουμε $f'(x) > 0$. Άρα:

$$F'(x)=f'(x)+1 > 0$$

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0,1)$, άρα έχει το πολύ μία ρίζα.

Απάντηση: η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho \in (x_0,1)$.

Δ4. Απόδειξη της ανισότητας

Από το Δ3 η ρ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f(x)+x=x_0$$

Άρα για $x=\rho$:

$$f(\rho)+\rho=x_0 \Rightarrow f(\rho)=x_0-\rho$$

Επειδή $\rho > x_0$, έχουμε:

$$f(\rho)=x_0-\rho < 0$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη f στο διάστημα $[x_0,\rho]$. Υπάρχει $\xi \in (x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\rho)-f(x_0)=f'(\xi)(\rho-x_0)$$

Άρα:

$$f(x_0)=f(\rho)-f'(\xi)(\rho-x_0)$$

Επειδή $f(\rho) = x_0 - \rho = -(\rho - x_0)$, παίρνουμε:

$$f(x_0) = -(\rho - x_0) - f'(\xi)(\rho - x_0)$$

$$f(x_0) = -(\rho - x_0)(1 + f'(\xi))$$

$$f(x_0) = f(\rho)(1 + f'(\xi))$$

Τώρα έστω $k \in (\rho, 1)$. Επειδή $\xi \in (x_0, \rho)$ και $k \in (\rho, 1)$, έχουμε $\xi < k$. Από $f''(x) = e^x + 2 > 0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα:

$$f'(\xi) < f'(k)$$

Προσθέτουμε 1:

$$1 + f'(\xi) < 1 + f'(k)$$

Πολλαπλασιάζουμε με $f(\rho) < 0$, οπότε η φορά της ανισότητας αλλάζει:

$$f(\rho)(1 + f'(\xi)) > f(\rho)(1 + f'(k))$$

Επειδή $f(x_0) = f(\rho)(1 + f'(\xi))$, τελικά:

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(k) + 1)$$

Απάντηση: αποδείχθηκε ότι $f(x_0) > f(\rho)(f'(k) + 1)$, για κάθε $k \in (\rho, 1)$.