

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου - Πανελλαδικές 2020 (Παλαιό Σύστημα)

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη παραγώγου αθροίσματος

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ότι:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)]}{h}.$$

Άρα:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right\}.$$

Επειδή οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τα δύο όρια υπάρχουν και είναι αντίστοιχα $f'(x_0)$, $g'(x_0)$.

Επομένως:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

A2. Ορισμός πρώτης παραγώγου

Αν f είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 είναι το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η πρώτη παράγωγος της f είναι η συνάρτηση f' με πεδίο ορισμού το A_1 , η οποία σε κάθε $x \in A_1$ αντιστοιχίζει τον αριθμό $f'(x)$.

Δηλαδή: $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, με $x \mapsto f'(x)$.

A3. Θεώρημα Bolzano

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Με απλά λόγια: αν μια συνεχής συνάρτηση παίρνει αντίθετα πρόσημα στα άκρα ενός διαστήματος, τότε μηδενίζεται κάπου ανάμεσα.

A4. Χαρακτηρισμός ισχυρισμού

Ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

Αν πάρουμε $f(x) = x$ και $x_0 = 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Όμως:

$$1/f(x) = 1/x.$$

Για $x \rightarrow 0^+$ έχουμε $1/x \rightarrow +\infty$, ενώ για $x \rightarrow 0^-$ έχουμε $1/x \rightarrow -\infty$. Άρα το διπλό όριο $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ δεν είναι ούτε $+\infty$ ούτε $-\infty$.

Επομένως ο ισχυρισμός δεν ισχύει γενικά.

A5. Σωστό - Λάθος

α) ΣΩΣΤΟ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε για κάθε θετικό αριθμό M υπάρχει περιοχή του x_0 όπου $f(x) > M$. Παίρνοντας $M=0$, προκύπτει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

β) ΣΩΣΤΟ. Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε από το θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi)=0$, άτοπο αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

γ) ΛΑΘΟΣ. Η γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση δεν έχει υποχρεωτικά θετική παράγωγο σε κάθε σημείο. Παράδειγμα: $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά $f'(0)=0$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(3x+1)/(x-3)$, με $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

B1. Απόδειξη ότι η f αντιστρέφεται

Για να αποδείξουμε ότι η f αντιστρέφεται, αρκεί να δείξουμε ότι είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = [3(x-3) - (3x+1)] / (x-3)^2 = (3x-9-3x-1) / (x-3)^2 = -10 / (x-3)^2.$$

Επειδή $(x-3)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 3$, έχουμε:

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{3\}.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$. Επιπλέον, από τη σχέση της B2 προκύπτει ότι η f έχει αντίστροφη στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

Εναλλακτικά, λύνουμε ως προς x : αν $y=(3x+1)/(x-3)$, τότε $y(x-3)=3x+1$, άρα $x(y-3)=3y+1$ και $x=(3y+1)/(y-3)$, με $y \neq 3$. Επομένως η αντιστοίχιση είναι μονοσήμαντη και η f αντιστρέφεται.

B2. Απόδειξη ότι $f=f^{-1}$

Θέτουμε $y=f(x)$:

$$y=(3x+1)/(x-3).$$

Λύνουμε ως προς x :

$$y(x-3)=3x+1$$

$$xy-3y=3x+1$$

$$xy-3x=3y+1$$

$$x(y-3)=3y+1$$

$$x=(3y+1)/(y-3).$$

Άρα:

$$f^{-1}(y)=(3y+1)/(y-3).$$

Αν αλλάξουμε το γράμμα y σε x , παίρνουμε:

$$f^{-1}(x)=(3x+1)/(x-3)=f(x).$$

Επομένως οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

B3. Απόδειξη ότι $(f \circ f)(x)=x$

Αφού από το B2 έχουμε $f=f^{-1}$, ισχύει αμέσως:

$$(f \circ f)(x)=f(f(x))=x.$$

Κάνουμε και την πράξη για πλήρη έλεγχο:

$$f(f(x)) = [3 \cdot f(x) + 1] / [f(x) - 3].$$

$$\text{Με } f(x) = (3x+1)/(x-3):$$

$$\text{Αριθμητής: } 3(3x+1)/(x-3) + 1 = [9x+3+x-3]/(x-3) = 10x/(x-3).$$

$$\text{Παρονομαστής: } (3x+1)/(x-3) - 3 = [3x+1-3x+9]/(x-3) = 10/(x-3).$$

Άρα:

$$f(f(x)) = [10x/(x-3)] / [10/(x-3)] = x.$$

B4. Υπολογισμός ορίου

Ζητείται:

$$\lim_{x \rightarrow -1/3} f(x) \cdot \eta\mu(1/(3x+1)).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -1/3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1/3} (3x+1)/(x-3) = 0/(-10/3) = 0.$$

Επίσης ισχύει πάντα:

$$-1 \leq \eta\mu(1/(3x+1)) \leq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $|f(x)|$ και επειδή $f(x) \rightarrow 0$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow -1/3} f(x) \cdot \eta\mu(1/(3x+1)) = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Στο σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1. Η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών είναι $\theta \in (0, \pi)$.

Γ1. Εμβαδόν ως συνάρτηση της θ

Το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα το ύψος AM είναι και διάμεσος της βάσης ΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OMB έχουμε OB=1 και γωνία BOM= θ .

Άρα:

$$OM = \sigma\upsilon\nu\theta \text{ και } MB = \eta\mu\theta.$$

Επομένως:

$$B\Gamma = 2MB = 2\eta\mu\theta.$$

Επίσης:

$$AM = AO + OM = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$E(\theta) = 1/2 \cdot B\Gamma \cdot AM = 1/2 \cdot 2\eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta).$$

Επομένως:

$$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta, \text{ με } \theta \in (0, \pi).$$

Γ2. Μέγιστο εμβαδόν

Έχουμε:

$$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta = \eta\mu\theta + \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Παραγωγίζουμε:

$$E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + (\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta.$$

Θέτουμε $E'(\theta)=0$:

$$\sin\theta + \sin 2\theta = 0.$$

Επειδή $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta - 1$, παίρνουμε:

$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0.$$

Θέτουμε $u = \sin\theta$:

$$2u^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow (2u-1)(u+1) = 0.$$

Άρα $u = 1/2$ ή $u = -1$. Στο διάστημα $\theta \in (0, \pi)$, η τιμή $u = -1$ αντιστοιχεί στο $\theta = \pi$, που δεν ανήκει στο διάστημα. Επομένως:

$$\sin\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/3.$$

Έλεγχος προσήμου: για $\theta \in (0, \pi/3)$, $E'(\theta) > 0$, ενώ για $\theta \in (\pi/3, \pi)$, $E'(\theta) < 0$. Άρα στο $\theta = \pi/3$ το εμβαδόν μεγιστοποιείται.

Η μέγιστη τιμή είναι:

$$E(\pi/3) = (1 + 1/2) \cdot \sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/4.$$

Γ3. Ακριβώς δύο γωνίες με εμβαδόν $3/4$

Από το Γ2 η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi/3)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(\pi/3, \pi)$.

Επίσης:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta) = 0, \quad E(\pi/3) = 3\sqrt{3}/4 > 3/4, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} E(\theta) = 0.$$

Στο διάστημα $(0, \pi/3)$, επειδή η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα από τιμές κοντά στο 0 μέχρι την τιμή $3\sqrt{3}/4$, υπάρχει ακριβώς μία $\theta_1 \in (0, \pi/3)$ με $E(\theta_1) = 3/4$.

Στο διάστημα $(\pi/3, \pi)$, επειδή η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα από $3\sqrt{3}/4$ προς 0, υπάρχει ακριβώς μία $\theta_2 \in (\pi/3, \pi)$ με $E(\theta_2) = 3/4$.

Άρα υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες $E(\theta) = 3/4$.

Γ4. Απόδειξη με Θεώρημα Μέσης Τιμής

Από το Γ3 γνωρίζουμε ότι:

$$\theta_1 \in (0, \pi/3), \quad \theta_2 \in (\pi/3, \pi), \quad \text{και} \quad E(\theta_1) = E(\theta_2) = 3/4.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\theta_1, \pi/3]$. Υπάρχει $\xi_1 \in (\theta_1, \pi/3)$ τέτοιο ώστε:

$$E(\pi/3) - E(\theta_1) = (\pi/3 - \theta_1)E'(\xi_1).$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\pi/3, \theta_2]$. Υπάρχει $\xi_2 \in (\pi/3, \theta_2)$ τέτοιο ώστε:

$$E(\theta_2) - E(\pi/3) = (\theta_2 - \pi/3)E'(\xi_2).$$

Επειδή $E(\theta_1) = E(\theta_2)$, έχουμε:

$$E(\pi/3) - E(\theta_1) = E(\pi/3) - E(\theta_2).$$

Από τη δεύτερη σχέση:

$$E(\pi/3) - E(\theta_2) = -(\theta_2 - \pi/3)E'(\xi_2) = (\pi/3 - \theta_2)E'(\xi_2).$$

Άρα:

$$(\pi/3 - \theta_1)E'(\xi_1) = (\pi/3 - \theta_2)E'(\xi_2).$$

Τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν στο $(0, \pi)$, όπως ζητείται.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x\ln x-\ln(\lambda x)$, $x>0$, $\lambda>0$ και $g(x)=x^x$, $x>0$.

Δ1. Ελάχιστο της f και τύπος σημείου ακρότατου

Γράφουμε τη f ως:

$$f(x)=x\ln x-\ln(\lambda x)=x\ln x-\ln\lambda-\ln x=(x-1)\ln x-\ln\lambda.$$

Παραγωγίζουμε:

$$f'(x)=(x\ln x)'-(\ln(\lambda x))'=(\ln x+1)-1/x.$$

Άρα:

$$f'(x)=\ln x+1-1/x.$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x)=1/x+1/x^2 > 0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον:

$$f'(1)=\ln 1+1-1=0.$$

Επομένως η f' αλλάζει πρόσημο από αρνητικό σε θετικό στο $x=1$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$.

Η ελάχιστη τιμή είναι:

$$f(1)=1\cdot\ln 1-\ln(\lambda\cdot 1)=0-\ln\lambda=-\ln\lambda.$$

Άρα το σημείο ακρότατου είναι:

$$A(1, -\ln\lambda).$$

Καθώς $\lambda>0$ μεταβάλλεται, ο αριθμός $-\ln\lambda$ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Άρα το σημείο A κινείται πάνω στην ευθεία:

$$x=1.$$

Δ2. Μεγαλύτερη τιμή του λ

Θέλουμε τη μεγαλύτερη τιμή $\lambda>0$ ώστε:

$$x^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x>0.$$

Επειδή $x>0$, διαιρούμε με x :

$$x^x/x \geq \lambda \Rightarrow x^{x-1} \geq \lambda.$$

Άρα πρέπει:

$$\lambda \leq x^{x-1} \text{ για κάθε } x>0.$$

Η μεγαλύτερη επιτρεπτή τιμή του λ είναι το ελάχιστο της συνάρτησης:

$$\varphi(x)=x^{x-1}.$$

Γράφουμε:

$$\varphi(x)=e^{[(x-1)\ln x]}.$$

Αρκεί να μελετήσουμε τον εκθέτη:

$$u(x)=(x-1)\ln x.$$

Παράγωγος:

$$u'(x)=\ln x+(x-1)/x = \ln x+1-1/x.$$

Αυτή είναι ίδια με την f' του Δ1, άρα μηδενίζεται μόνο στο $x=1$ και εκεί το u παρουσιάζει ελάχιστο.

$u(1)=0$, άρα:

$$\min \varphi(x)=e^0=1.$$

Επομένως η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι:

$$\lambda=1.$$

Δ3. Μοναδική εφαπτομένη της C_g που περνά από την αρχή

Για τα Δ3 και Δ4 έχουμε $\lambda=1$. Άρα η ευθεία που δίνεται είναι $y=x$.

Η συνάρτηση είναι $g(x)=x^x$. Γράφουμε:

$$g(x)=e^{x \ln x}.$$

Άρα:

$$g'(x)=x^x(\ln x + 1).$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο με τετμημένη $\alpha > 0$ είναι:

$$y=g(\alpha)+g'(\alpha)(x-\alpha).$$

Για να διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$, πρέπει:

$$0=g(\alpha)-\alpha g'(\alpha).$$

Δηλαδή:

$$0=\alpha^\alpha - \alpha \cdot \alpha^\alpha (\ln \alpha + 1) = \alpha^\alpha [1 - \alpha(\ln \alpha + 1)].$$

Επειδή $\alpha^\alpha > 0$, πρέπει:

$$1 - \alpha(\ln \alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \alpha - 1 = 0.$$

Θεωρούμε $q(\alpha) = \alpha \ln \alpha + \alpha - 1$. Τότε:

$$q'(\alpha) = \ln \alpha + 2 \text{ και } q''(\alpha) = 1/\alpha > 0.$$

Η q είναι κυρτή, έχει ένα ελάχιστο και επειδή $q(1)=0$, ενώ $q(\alpha) < 0$ για $0 < \alpha < 1$ και $q(\alpha) > 0$ για $\alpha > 1$, η μοναδική λύση είναι $\alpha=1$.

Άρα η μοναδική εφαπτομένη από την αρχή είναι η εφαπτομένη στο $\alpha=1$.

Για $\alpha=1$:

$$g(1)=1 \text{ και } g'(1)=1 \cdot (\ln 1 + 1)=1.$$

Επομένως η εφαπτομένη είναι:

$$y-1=1(x-1) \Rightarrow y=x.$$

Δ4.i. Συνέχεια της h

Η h ορίζεται ως:

$$h(x)=x^x \text{ για } x>0 \text{ και } h(0)=1.$$

Για $x>0$, η h είναι συνεχής ως $h(x)=x^x=e^{x \ln x}$.

Μένει να ελέγξουμε τη συνέχεια στο 0.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

Αλλά $h(0)=1$. Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0).$$

Επομένως η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Δ4.ii. Ύπαρξη ρίζας στο (0,1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = x^{2020} \cdot (3 - 2 \int_{1 \rightarrow 2} g(t) dt) + (1 - x) \cdot \int_{0 \rightarrow 1} h(1 - t) dt.$$

Η F είναι συνεχής στο $[0, 1]$, αφού αποτελείται από πολυωνυμικούς παράγοντες και σταθερά ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων.

Θέτουμε:

$$A = \int_{1 \rightarrow 2} g(t) dt = \int_{1 \rightarrow 2} t^t dt \text{ και } B = \int_{0 \rightarrow 1} h(1 - t) dt.$$

Για $t \in (1, 2)$, ισχύει $t^t > t$, διότι $t > 1$ και $t > 1$ στον εκθέτη αυξάνει την τιμή. Άρα:

$$A = \int_{1 \rightarrow 2} t^t dt > \int_{1 \rightarrow 2} t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 = (4 - 1)/2 = 3/2.$$

Επομένως:

$$3 - 2A < 3 - 2 \cdot (3/2) = 0.$$

Επίσης $B > 0$, γιατί $h(1 - t) > 0$ στο $[0, 1]$.

Υπολογίζουμε τις τιμές της F στα άκρα:

$$F(0) = 0^{2020} (3 - 2A) + (1 - 0)B = B > 0.$$

$$F(1) = 1^{2020} (3 - 2A) + (1 - 1)B = 3 - 2A < 0.$$

Άρα $F(0) > 0$ και $F(1) < 0$. Επειδή η F είναι συνεχής στο $[0, 1]$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$F(x_0) = 0.$$

Δηλαδή η δοσμένη εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).