

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2021**Αναλυτικές λύσεις Πανελλαδικών Εξετάσεων****ΘΕΜΑ Α****A1. Απόδειξη μονοτονίας από θετική παράγωγο**

Έστω x_1, x_2 δύο σημεία του διαστήματος Δ με $x_1 < x_2$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , αφού είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ . Επομένως εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_1, x_2]$.

Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$(f(x_2) - f(x_1)) / (x_2 - x_1) = f'(\xi).$$

Από την υπόθεση ισχύει $f'(\xi) > 0$. Επίσης $x_2 - x_1 > 0$. Άρα:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0$$

$$\text{δηλαδή } f(x_2) > f(x_1).$$

Άρα, για κάθε $x_1 < x_2$ στο Δ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

A2. Κριτήριο παρεμβολής

Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι ορισμένες κοντά στο x_0 και ισχύει:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ κοντά στο } x_0$$

και

$$\lim g(x) = \lim h(x) = \ell, \text{ όταν } x \rightarrow x_0,$$

τότε ισχύει:

$$\lim f(x) = \ell, \text{ όταν } x \rightarrow x_0.$$

Το ίδιο κριτήριο ισχύει και για όρια στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

A3. Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

1. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A , και
2. για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Δηλαδή δεν αρκεί να έχουν ίδιο τύπο σε κάποια σημεία. Πρέπει να έχουν ίδιο πεδίο ορισμού και ίδιες τιμές σε κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού.

A4. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Λάθος	Η ανισότητα $\eta\mu x < x$ δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Για $x < 0$ συμβαίνει αντίστροφα, π.χ. $\eta\mu(-1) \approx -0,84 > -1$.
β	Σωστό	Για αντιστρέψιμη f με πεδίο ορισμού A ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

γ	Σωστό	Αν το όριο της f στο x_0 είναι θετικός αριθμός, τότε οι τιμές της f παραμένουν θετικές σε περιοχή του x_0 .
δ	Σωστό	Αν $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
ε	Σωστό	Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

ΘΕΜΑ Β

B1. Εύρεση τύπου της f

Δίνεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-(x)}.$$

Θέτουμε $t = x + 1$, άρα $x = t - 1$. Τότε:

$$f(t) = t \cdot e^{-(t-1)} = t \cdot e^{(1-t)}.$$

Επειδή το t διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$, αντικαθιστούμε t με x και παίρνουμε:

$$f(x) = x \cdot e^{(1-x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

B2. Μονοτονία και ακρότατα

Η συνάρτηση είναι:

$$f(x) = x \cdot e^{(1-x)}.$$

Παραγωγίζουμε με κανόνα γινομένου:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{(1-x)} + x \cdot e^{(1-x)} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = e^{(1-x)}(1-x).$$

Επειδή $e^{(1-x)} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από το $1-x$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Στο $x = 1$ η παράγωγος αλλάζει πρόσημο από $+$ σε $-$, οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο:

$$f(1) = 1 \cdot e^0 = 1.$$

Δεν υπάρχει ελάχιστο, αφού όπως θα φανεί και από το σύνολο τιμών, η f τείνει στο $-\infty$ όταν $x \rightarrow -\infty$.

B3. Κυρτότητα, σημείο καμπής και ασύμπτωτες

Από το B2 έχουμε:

$$f'(x) = e^{(1-x)}(1-x).$$

Παραγωγίζουμε ξανά:

$$f''(x) = -e^{(1-x)}(1-x) - e^{(1-x)}$$

$$f''(x) = e^{(1-x)}(x-2).$$

Επειδή $e^{(1-x)} > 0$, το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το $x-2$.

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2)$ και κυρτή στο $(2, +\infty)$. Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x = 2$, υπάρχει σημείο καμπής:

$$f(2) = 2 \cdot e^{(-1)} = 2/e.$$

Σημείο καμπής: $K(2, 2/e)$.

Ασύμπτωτες: Το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim x \cdot e^{(1-x)} = \lim (e \cdot x / e^x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Για $x \rightarrow -\infty$ έχουμε $e^{(1-x)} \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$, άρα $f(x) \rightarrow -\infty$. Δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Επίσης δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$, επειδή:

$$\lim [f(x)/x] = \lim e^{(1-x)} = +\infty, \text{ όταν } x \rightarrow -\infty,$$

οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης δεν είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός.

B4. Σύνολο τιμών και πλήθος ριζών της $f(x)=\lambda$

B4(i). Σύνολο τιμών

Από τη μονοτονία γνωρίζουμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο 1 στο $x = 1$.

Επιπλέον:

$$\lim f(x) = -\infty, \text{ όταν } x \rightarrow -\infty,$$

$$\lim f(x) = 0, \text{ όταν } x \rightarrow +\infty.$$

Στο διάστημα $(-\infty, 1]$ η f είναι συνεχής και αύξουσα από $-\infty$ μέχρι 1. Άρα παίρνει όλες τις τιμές από $-\infty$ έως 1.

$$\text{Σύνολο τιμών: } f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1].$$

B4(ii). Πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$

Χρησιμοποιούμε τη μορφή της γραφικής παράστασης από τη μονοτονία:

- στο $(-\infty, 1]$ η f είναι αύξουσα από $-\infty$ έως 1,
- στο $[1, +\infty)$ η f είναι φθίνουσα από 1 έως 0, με όριο 0 από πάνω.

Άρα:

Τιμή του λ	Πλήθος λύσεων της $f(x)=\lambda$
$\lambda > 1$	καμία λύση
$\lambda = 1$	μία λύση, $x = 1$
$0 < \lambda < 1$	δύο λύσεις
$\lambda = 0$	μία λύση, $x = 0$
$\lambda < 0$	μία λύση

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq 3\pi/2, \text{ με } \alpha < -3. \end{cases}$$

Γ1. Συνέχεια και μη παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 0$

Η f είναι πολυωνυμική για $x < 0$, άρα συνεχής εκεί. Είναι επίσης τριγωνομετρική για $0 < x \leq 3\pi/2$, άρα συνεχής εκεί. Πρέπει να ελέγξουμε μόνο το $x = 0$.

$$f(0) = \alpha \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1.$$

Αριστερό όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1, \text{ όταν } x \rightarrow 0^-.$$

Δεξί όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \sin 0 = 0, \text{ όταν } x \rightarrow 0^+.$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1, \text{ όταν } x \rightarrow 0.$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και συνολικά συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Για την παραγωγισιμότητα στο 0 υπολογίζουμε τις πλευρικές παραγώγους.

Για $x < 0$:

$$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1, \text{ άρα } f'_-(0) = -1.$$

Για $x > 0$:

$$f'(x) = -\eta \mu x, \text{ άρα } f'_+(0) = -\eta \mu 0 = 0.$$

Οι πλευρικές παράγωγοι είναι διαφορετικές:

$$f'_-(0) = -1 \neq 0 = f'_+(0).$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Θεώρημα Rolle στο $[0, 3\pi/2]$ και εύρεση ξ

Γ2(i). Έλεγχος προϋποθέσεων Rolle

Στο διάστημα $[0, 3\pi/2]$ η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = \sin x$ για $x > 0$ και $f(0) = 1$.

Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις:

1. Είναι συνεχής στο $[0, 3\pi/2]$, όπως αποδείχθηκε στο Γ1.
2. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3\pi/2)$, αφού εκεί $f(x) = \sin x$.
3. $f(0) = 1$, ενώ $f(3\pi/2) = \sin(3\pi/2) = 0$.

Η τρίτη προϋπόθεση δεν ισχύει, διότι:

$$f(0) \neq f(3\pi/2).$$

Άρα η f δεν ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0, 3\pi/2]$.

Γ2(ii). Εύρεση του μοναδικού ξ

Στο διάστημα $(0, 3\pi/2)$ έχουμε $f(x) = \sin x$, άρα:

$$f'(x) = -\eta \mu x.$$

Ζητάμε $f'(\xi) = 0$:

$$-\eta \mu \xi = 0 \Leftrightarrow \eta \mu \xi = 0.$$

Στο διάστημα $(0, 3\pi/2)$ η μοναδική λύση είναι:

$$\xi = \pi.$$

Γ3. Δεν υπάρχουν οριζόντιες εφαπτόμενες για αρνητικές τετμημένες

Για $x < 0$ έχουμε:

$$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1.$$

Θέτουμε $t = -x$. Επειδή $x < 0$, έχουμε $t > 0$. Τότε:

$$f'(-t) = 3\alpha t^2 + 6t - 1.$$

Αφού $\alpha < -3$, ισχύει $3\alpha < -9$, άρα:

$$3\alpha t^2 < -9t^2.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} f'(-t) &= 3\alpha t^2 + 6t - 1 < -9t^2 + 6t - 1 \\ &= -(9t^2 - 6t + 1) = -(3t - 1)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Άρα τελικά $f'(-t) < 0$ για κάθε $t > 0$, δηλαδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$, πρέπει $f'(x)=0$. Αυτό δεν συμβαίνει για κανένα $x < 0$.

Άρα δεν υπάρχουν τέτοια σημεία με αρνητική τετμημένη.

Γ4. Απόδειξη ότι $f(x) \geq -1$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (-\infty, 3\pi/2]$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

1η περίπτωση: $0 < x \leq 3\pi/2$

Τότε $f(x)=\sin x$. Είναι γνωστό ότι:

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

άρα $f(x) \geq -1$.

2η περίπτωση: $x \leq 0$

Θέτουμε $t = -x$, οπότε $t \geq 0$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(-t) &= \alpha(-t)^3 - 3(-t)^2 - (-t) + 1 \\ &= -\alpha t^3 - 3t^2 + t + 1. \end{aligned}$$

Θέλουμε $f(-t) \geq -1$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} -\alpha t^3 - 3t^2 + t + 1 &\geq -1 \\ \Leftrightarrow -\alpha t^3 - 3t^2 + t + 2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Επειδή $\alpha < -3$, έχουμε $-\alpha > 3$. Άρα για $t \geq 0$:

$$-\alpha t^3 - 3t^2 + t + 2 \geq 3t^3 - 3t^2 + t + 2.$$

Θεωρούμε:

$$P(t) = 3t^3 - 3t^2 + t + 2.$$

Τότε:

$$P'(t) = 9t^2 - 6t + 1 = (3t - 1)^2 \geq 0.$$

Άρα η P είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως:

$$P(t) \geq P(0) = 2 > 0.$$

Άρα $-\alpha t^3 - 3t^2 + t + 2 > 0$ και συνεπώς $f(-t) \geq -1$.

Συμπέρασμα: $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (-\infty, 3\pi/2]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\ln x = 1/x$ στο $(1, e)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \ln x - 1/x, \quad x > 0.$$

Η F είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ειδικά στο $[1, e]$. Υπολογίζουμε:

$$F(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0,$$

$$F(e) = \ln e - 1/e = 1 - 1/e > 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα x_0 στο $(1, e)$.

Για τη μοναδικότητα υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$F'(x) = 1/x + 1/x^2 = (x+1)/x^2 > 0, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

Συνεπώς η εξίσωση $\ln x = 1/x$ έχει μοναδική ρίζα x_0 και αυτή ανήκει στο $(1, e)$.

Δ2. Ελάχιστο της f στο x_0 και $f(x_0)=0$

Δίνεται:

$$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1, \quad x > 0.$$

Επειδή το x_0 είναι ρίζα της $\ln x = 1/x$, ισχύει:

$$\ln x_0 = 1/x_0.$$

Παραγωγίζουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln x_0 - 1/x = 1/x_0 - 1/x \\ &= (x - x_0)/(x x_0). \end{aligned}$$

Επειδή $x > 0$ και $x_0 > 0$, το πρόσημο της f' εξαρτάται από το $x - x_0$.

$$f'(x) < 0, \quad \text{για } 0 < x < x_0$$

$$f'(x) = 0, \quad \text{για } x = x_0$$

$$f'(x) > 0, \quad \text{για } x > x_0$$

Άρα η f είναι φθίνουσα στο $(0, x_0]$ και αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 .

Υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (\ln x_0)(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 \\ &= x_0 \ln x_0 - 1. \end{aligned}$$

Από $\ln x_0 = 1/x_0$ έχουμε $x_0 \ln x_0 = 1$. Άρα:

$$f(x_0) = 1 - 1 = 0.$$

Δ3. Μοναδικό κοινό σημείο και κοινή εφαπτομένη

Δίνονται:

$$g(x) = x \cdot e^{(-x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$h(x) = (x_0/e)^{(x+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινό σημείο, τότε $g(x)=h(x)$. Επειδή $h(x)>0$, πρέπει $g(x)>0$, άρα $x>0$.

Λύνουμε την εξίσωση:

$$x \cdot e^{(-x)} = (x_0/e)^{(x+1)}.$$

Ισοδύναμα:

$$x/e^x = x^{x+1} / e^{x+1}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με e^{x+1} :

$$ex = x^{x+1}.$$

Παίρνουμε λογάριθμους, αφού $x > 0$:

$$\ln(ex) = \ln(x^{x+1})$$

$$1 + \ln x = (x + 1)\ln x$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)(x + 1) - \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Από το Δ2 η f έχει ελάχιστο 0 μόνο στο x_0 . Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση $x=x_0$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Το κοινό σημείο είναι:

$$A(x_0, g(x_0)) = A(x_0, x_0 e^{-(x_0)}).$$

Θα δείξουμε ότι έχουν και κοινή εφαπτομένη, δηλαδή ίσες παραγώγους στο x_0 .

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

Άρα:

$$g'(x_0) = e^{-(x_0)}(1 - x_0).$$

Για την h :

$$h'(x) = (x_0/e)^{x+1} \cdot \ln(x_0/e).$$

Επειδή $\ln(x_0/e) = \ln x_0 - 1$ και $\ln x_0 = 1/x_0$, έχουμε:

$$h'(x_0) = h(x_0)(\ln x_0 - 1)$$

$$= x_0 e^{-(x_0)}(1/x_0 - 1)$$

$$= e^{-(x_0)}(1 - x_0).$$

Άρα:

$$g'(x_0) = h'(x_0).$$

Οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και στο σημείο αυτό έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της ϕ

Δίνεται ότι η ϕ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ότι:

$$f(x) > \phi(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \phi(x))$ έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα η απόστασή τους είναι κατακόρυφη:

$$AB = |f(x) - \phi(x)|.$$

Επειδή $f(x) > \phi(x)$, έχουμε:

$$AB = f(x) - \phi(x).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$D(x) = f(x) - \phi(x), \quad x > 0.$$

Από την υπόθεση, η απόσταση γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$. Άρα η D έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Θέλουμε να δείξουμε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της ϕ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Αν η ϕ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της ϕ από τον ορισμό.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε και η D είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αφού η f είναι παραγωγίσιμη. Επειδή η D έχει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 , από το Θεώρημα Fermat ισχύει:

$$D'(x_0) = 0.$$

Όμως:

$$D'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0).$$

Από το Δ2 έχουμε $f'(x_0)=0$. Άρα:

$$0 = 0 - \varphi'(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0.$$

Και σε αυτή την περίπτωση το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ .