

Αναλυτικές Λύσεις

Μαθηματικά Προσανατολισμού - Πανελλαδικές 2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Παράγουσες

Έστω F μία παράγουσα της f στο διάστημα Δ . Άρα, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$F'(x) = f(x)$$

Για κάθε σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $G(x) = F(x) + c$. Τότε:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Άρα κάθε $G(x) = F(x) + c$ είναι παράγουσα της f στο Δ .

Αν τώρα G είναι οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο Δ , τότε:

$$G'(x) = f(x) \text{ και } F'(x) = f(x)$$

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Επειδή η παράγωγος της $G - F$ είναι μηδέν σε διάστημα, η $G - F$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$G(x) - F(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$$

Επομένως όλες οι παράγουσες της f στο Δ είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $F(x) + c$, με $c \in \mathbb{R}$.

A2. Θεώρημα Fermat

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

A3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια της f στο x_0 είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

A4. Σωστό - Λάθος

- α) Σωστό. Για $0 < \alpha < 1$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$.
- β) Σωστό. Αν $f(0) = f(1)$, τότε από Rolle θα υπήρχε $\xi \in (0, 1)$ με $f'(\xi) = 0$, άτοπο.
- γ) Σωστό. Η $\sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη όπου $\eta\mu x \neq 0$ και ισχύει $(\sigma\phi x)' = -1/\eta\mu^2 x$.
- δ) Λάθος. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)/x = 0$, όχι 1.
- ε) Λάθος. Μπορεί το ολοκλήρωμα να είναι μη αρνητικό χωρίς $f(x) \geq 0$ για κάθε x του διαστήματος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Προσδιορισμός της $h = f \circ g$

Δίνεται:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \quad x \in (-\infty, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$$

Για να ορίζεται η σύνθεση $h=f \circ g$, πρέπει $g(x)=\sqrt{x}$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f :

$$\sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της h είναι $[0,1]$.

$$h(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^4-2(\sqrt{x})^2+1=x^2-2x+1$$

$$h(x)=(x-1)^2, \quad x \in [0,1]$$

B2. 1-1 και αντίστροφη

Στο $[0,1]$ έχουμε $h(x)=(x-1)^2=(1-x)^2$. Η h είναι παραγωγίσιμη και:

$$h'(x)=2(x-1)$$

Για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $h'(x) < 0$, ενώ $h'(1)=0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, επομένως είναι 1-1.

$$h([0,1])=[h(1),h(0)]=[0,1]$$

Για την αντίστροφη θέτουμε $y=h(x)$:

$$y=(1-x)^2$$

Επειδή $x \in [0,1]$, έχουμε $1-x \geq 0$, άρα:

$$\sqrt{y}=1-x \Rightarrow x=1-\sqrt{y}$$

Επομένως:

$$h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}, \quad x \in [0,1]$$

B3. Η συνάρτηση φ

B3(i). Συνέχεια στο $[0,1]$

Για $x \in [0,1)$:

$$\varphi(x)=h^{-1}(x)/(1-x)=(1-\sqrt{x})/(1-x)$$

Επειδή $1-x=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$, παίρνουμε:

$$\varphi(x)=1/(1+\sqrt{x}), \quad x \in [0,1)$$

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$. Στο $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1/(1+\sqrt{x}) = 1/2$$

Επειδή $\varphi(1)=1/2$, η φ είναι συνεχής και στο $x=1$. Άρα η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών.

B3(ii). Ύπαρξη x_0

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi(1)=1/2$$

Από $\pi/6 < \alpha < \pi/2$ παίρνουμε:

$$1/2 < \eta\mu\alpha < 1$$

Η τιμή $\eta\mu\alpha$ βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές $\varphi(1)=1/2$ και $\varphi(0)=1$. Επειδή η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Προσδιορισμός της f

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα $f(0)=0$. Δίνεται:

$$f'(x)=-2, \text{ για } x < -1 \text{ και } f'(x)=3x^2-1, \text{ για } x > -1$$

Για $x > -1$:

$$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow f(x)=x^3-x+c_1$$

Επειδή $f(0)=0$, έχουμε $c_1=0$. Άρα:

$$f(x)=x^3-x, \quad x > -1$$

Για $x < -1$:

$$f'(x)=-2 \Rightarrow f(x)=-2x+c_2$$

Από τη συνέχεια στο $x=-1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)=(-1)^3-(-1)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x+c_2)=2+c_2=0 \Rightarrow c_2=-2$$

Επομένως:

$$f(x)=-2x-2, \quad \text{για } x \leq -1 \quad \text{και } f(x)=x^3-x, \quad \text{για } x > -1$$

Γ2. Εφαπτομένη

Για $x_0 > -1$ έχουμε $f(x)=x^3-x$ και $f'(x)=3x^2-1$. Η εφαπτομένη στο x_0 είναι:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Η τεταγμένη τομής με τον y 'γ προκύπτει για $x=0$:

$$y_0=f(x_0)-x_0f'(x_0)$$

$$y_0=(x_0^3-x_0)-x_0(3x_0^2-1)=-2x_0^3$$

Δίνεται $y_0=-2$, άρα:

$$-2x_0^3=-2 \Rightarrow x_0=1$$

Τότε $f(1)=0$ και $f'(1)=2$, οπότε:

$$y=2(x-1) \Rightarrow y=2x-2$$

Γ3. Ρυθμός μεταβολής εμβαδού

Το $M(x,y)$ κινείται στην ευθεία $y=2x-2$, με $x > 2$. Η προβολή του M στον x 'αξ είναι $K(x,0)$, ενώ $\Gamma(2,0)$. Άρα:

$$KG=x-2, \quad MK=y=2x-2$$

Το τρίγωνο MKG είναι ορθογώνιο, οπότε:

$$E=1/2 \cdot (x-2)(2x-2)=(x-2)(x-1)$$

Παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο t :

$$dE/dt=(2x-3) \cdot dx/dt$$

Στη στιγμή t_0 , το M είναι το $B(3,4)$, άρα $x=3$ και $dx/dt=2$. Επομένως:

$$dE/dt=(2 \cdot 3-3) \cdot 2=6$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι 6 τετραγωνικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Γ4. Όριο

Θέλουμε να υπολογίσουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\eta\mu(f(x))/f(x) + f(-x)/(1-x^3)]$$

Για $x \rightarrow -\infty$ ισχύει $x < -1$, άρα:

$$f(x)=-2x-2 \rightarrow +\infty$$

Επειδή $|\eta\mu(f(x))| \leq 1$ και $f(x) \rightarrow +\infty$, έχουμε:

$$\eta\mu(f(x))/f(x) \rightarrow 0$$

Επίσης, για $x \rightarrow -\infty$ έχουμε $-x \rightarrow +\infty$, άρα:

$$f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x$$

Επομένως:

$$f(-x)/(1-x^3)=(-x^3+x)/(1-x^3)$$

$$[(-x^3+x)/(1-x^3)] = [-1+1/x^2]/[1/x^3-1] \rightarrow 1$$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι:

$$0+1=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1(i). Ακριβώς δύο ρίζες

Δίνεται $f(x)=x-\ln(3x)$, $x>0$. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και:

$$f'(x)=1-1/x=(x-1)/x$$

- Για $0<x<1$: $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Για $x>1$: $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=+\infty, f(1)=1-\ln 3 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$$

Στο $(0,1)$, από συνέχεια και αλλαγή πρόσημου υπάρχει μία ρίζα x_1 . Η μοναδικότητα έρχεται από τη γνησίως φθίνουσα μονοτονία.

Στο $(1,+\infty)$, από συνέχεια και αλλαγή πρόσημου υπάρχει μία ρίζα x_2 . Η μοναδικότητα έρχεται από τη γνησίως αύξουσα μονοτονία.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες με:

$$x_1 < 1 < x_2$$

Δ1(ii). Κυρτότητα

$$f''(x)=1/x^2 > 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Εμβαδόν

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f είναι κάτω από τον άξονα x' , επομένως:

$$E = \int_{[x_1, x_2]} |f(x)| dx = - \int_{[x_1, x_2]} f(x) dx = \int_{[x_1, x_2]} (\ln(3x) - x) dx$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \ln(3x) dx = x \ln(3x) - x$$

Άρα:

$$E = [x \ln(3x) - x - x^2/2] \text{ από } x_1 \text{ έως } x_2$$

Επειδή x_1 και x_2 είναι ρίζες, ισχύει $\ln(3x_i)=x_i$ για $i=1,2$. Επομένως:

$$E = [x^2/2 - x] \text{ από } x_1 \text{ έως } x_2$$

$$E = (x_2^2 - x_1^2)/2 - (x_2 - x_1)$$

$$E = 1/2 \cdot (x_2 - x_1)(x_1 + x_2) - (x_2 - x_1)$$

$$E = 1/2 \cdot (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Δ3. Απόδειξη $f(2-x_1)<0$

Θέτουμε $t=1-x_1$. Επειδή $x_1<1$, έχουμε $0<t<1$. Τότε:

$$x_1=1-t \text{ και } 2-x_1=1+t$$

Υπολογίζουμε τη διαφορά:

$$f(1+t)-f(1-t)=2t+\ln[(1-t)/(1+t)]$$

Για $0 < t < 1$ ισχύει $\ln[(1+t)/(1-t)] > 2t$. Άρα:

$$2t + \ln[(1-t)/(1+t)] < 0$$

Επομένως:

$$f(1+t) < f(1-t)$$

Δηλαδή:

$$f(2-x_1) < f(x_1) = 0$$

Άρα $f(2-x_1) < 0$.

Δ4. Εξέταση ύπαρξης λύσης

Η εξίσωση είναι:

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο μελών:

$$\Phi(x) = 2f(x) + \ln 3 - 1 - f'(x_2)(x - x_2)$$

Θα δείξουμε ότι $\Phi(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Τότε η εξίσωση δεν έχει λύση.

Επειδή x_2 είναι ρίζα της f :

$$f(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Rightarrow \ln 3 = x_2 - \ln x_2$$

Επίσης:

$$f'(x_2) = 1 - 1/x_2$$

Θέτουμε $a = x_2 > 1$. Τότε:

$$\Phi(x) = 2(x - \ln(3x)) + \ln 3 - 1 - (1 - 1/a)(x - a)$$

$$\Phi(x) = x(1 + 1/a) - 2\ln x + \ln a - 2$$

Παραγωγίζουμε:

$$\Phi'(x) = 1 + 1/a - 2/x$$

Το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι:

$$1 + 1/a = 2/x \Rightarrow x = 2a/(a+1)$$

Επειδή $\Phi''(x) = 2/x^2 > 0$, το σημείο αυτό δίνει ελάχιστο. Υπολογίζουμε:

$$\Phi(2a/(a+1)) = \ln a - 2\ln(2a/(a+1))$$

$$\Phi(2a/(a+1)) = \ln((a+1)^2/(4a))$$

Αφού $a > 1$, έχουμε $(a+1)^2 > 4a$, άρα $\ln((a+1)^2/(4a)) > 0$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή της Φ είναι θετική, άρα $\Phi(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Συνεπώς η εξίσωση δεν έχει λύση.