

Αναλυτικές λύσεις - Μαθηματικά Προσανατολισμού

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2023 | Ημερήσια & Εσπερινά Γενικά Λύκεια

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη παραγώγου αθροίσματος

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ότι:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$\begin{aligned} ((f+g)'(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{(x-x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{(x-x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)} + \frac{g(x) - g(x_0)}{(x-x_0)} \right\}. \end{aligned}$$

Επειδή οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τα δύο όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί. Άρα, με ιδιότητα ορίων:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{(x-x_0)}$$

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Άρα η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ο ζητούμενος τύπος.

A2. Παραγωγισιμότητα σε κλειστό διάστημα

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν:

- είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του (a, b) ,
- έχει δεξιά παράγωγο στο a , δηλαδή υπάρχει το $f'_+(\alpha)$,
- έχει αριστερή παράγωγο στο β , δηλαδή υπάρχει το $f'_-(\beta)$.

A3. Θεώρημα Rolle και γεωμετρική ερμηνεία

Θεώρημα Rolle: Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$,
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) ,
- και $f(a) = f(b)$,

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 0.$$

Γεωμετρικά, αν τα άκρα της γραφικής παράστασης στο $[a, b]$ έχουν το ίδιο ύψος, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

A4. Σωστό - Λάθος

α) Λάθος

Επειδή $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, έχουμε $-1/x \leq \eta\mu x/x \leq 1/x$ για $x > 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x/x = 0$, όχι 1.

β) Λάθος

Παράδειγμα: $f(x)=x^3+x$. Τότε $f'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε x , άρα δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Λάθος

Η γνήσια αύξηση δεν επιβάλλει $f'(x)>0$ παντού. Παράδειγμα $f(x)=x^3$, γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά $f'(0)=0$.

δ) Σωστό

Για 1-1 συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της αντίστροφης f^{-1} είναι συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Σωστό

Η σύνθεση δεν είναι αντιμεταθετική γενικά. Συνήθως $f\circ g\neq g\circ f$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Προσδιορισμός της $f=g\circ h$

Δίνονται:

$$g(x)=(4-e^{2x})/e^x, \quad h(x)=\ln x, \quad x>0.$$

Η σύνθεση $f=g\circ h$ ορίζεται για $x>0$ και είναι:

$$f(x)=g(h(x))=g(\ln x)=[4-e^{2\ln x}]/e^{\ln x}.$$

Χρησιμοποιούμε ότι $e^{\ln x}=x$ και $e^{2\ln x}=x^2$. Επομένως:

$$f(x)=(4-x^2)/x = 4/x - x, \quad x>0.$$

B2. Μονοτονία και ανισότητα

B2(i). Μονοτονία της f

$$f(x)=4/x - x, \quad x>0.$$

$$f'(x)=-4/x^2 - 1 = -(4+x^2)/x^2.$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $x^2>0$ και $4+x^2>0$, άρα:

$$f'(x)<0, \quad \text{για κάθε } x>0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

B2(ii). Απόδειξη ανισότητας

Επειδή $e<\pi$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, έχουμε:

$$f(e)>f(\pi).$$

$$(4-e^2)/e > (4-\pi^2)/\pi.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $e\pi>0$:

$$\pi(4-e^2) > e(4-\pi^2).$$

Επειδή $4-e^2<0$, όταν διαιρούμε με το αρνητικό $4-e^2$, η φορά της ανισότητας αλλάζει:

$$\pi < e(4-\pi^2)/(4-e^2)$$

$$\pi/e < (4-\pi^2)/(4-e^2).$$

Άρα:

$$(4-\pi^2)/(4-e^2) > \pi/e.$$

B3. Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης

$$f(x) = 4/x - x, \quad x > 0.$$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη: εξετάζουμε το άκρο $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4/x - x) = +\infty.$$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$:

$$f(x) + x = 4/x \rightarrow 0, \text{ καθώς } x \rightarrow +\infty.$$

Άρα η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη. Δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη, αφού $f(x) \rightarrow -\infty$ όταν $x \rightarrow +\infty$.

B4. Υπολογισμός ορίου

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1+x^2)/f(x).$$

Ο αριθμητής είναι φραγμένος:

$$-1 \leq \sin(1+x^2) \leq 1.$$

Επίσης:

$$f(x) = 4/x - x \rightarrow -\infty.$$

Άρα $|\sin(1+x^2)/f(x)| \leq 1/|f(x)|$ και $1/|f(x)| \rightarrow 0$. Με το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1+x^2)/f(x) = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Απόδειξη ότι $\alpha=0$

Η συνάρτηση δίνεται από:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ 1/x + \alpha, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1.$$

Στο διάστημα $[2,3]$ έχουμε $x \geq 1$, άρα $f(x) = 1/x + \alpha$. Επομένως:

$$x f(x) = x(1/x + \alpha) = 1 + \alpha x.$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 x f(x) dx &= \int_2^3 (1 + \alpha x) dx \\ &= [x + \alpha x^2/2]_2^3 = (3 + 9\alpha/2) - (2 + 4\alpha/2) \\ &= 1 + 5\alpha/2. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση:

$$1 + 5\alpha/2 = 1 \Rightarrow 5\alpha/2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Γ2. Εφαπτομένη στο $x_0=1$

Γ2(i). Ύπαρξη εφαπτομένης

Με $\alpha=0$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ 1/x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Πρώτα ελέγχουμε συνέχεια στο $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1/1 = 1,$$

$$f(1) = 1.$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x=1$.

Ελέγχουμε τις πλευρικές παραγώγους:

$$\text{Για } x < 1: f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'_-(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1.$$

$$\text{Για } x > 1: f'(x) = -1/x^2 \Rightarrow f'_+(1) = -1.$$

Οι πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ και ορίζεται εφαπτομένη εκεί.

Γ2(ii). Εξίσωση εφαπτομένης και γωνία

$$f(1)=1, \quad f'(1)=-1.$$

Η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1 είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 1 = -(x - 1)$$

$$y = -x + 2.$$

Η κλίση είναι $\lambda = -1$. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$, τότε:

$$\epsilon\phi\omega = \lambda = -1, \text{ με } 0 \leq \omega < \pi.$$

Άρα:

$$\omega = 3\pi/4 = 135^\circ.$$

Γ3. Απόδειξη ότι η f είναι 1-1 και σύνολο τιμών

Για $x < 1$ έχουμε $f(x) = x^2 - 3x + 3$ και:

$$f'(x) = 2x - 3 < -1 < 0, \text{ για } x < 1.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$.

Για $x \geq 1$ έχουμε $f(x) = 1/x$ και:

$$f'(x) = -1/x^2 < 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1).$$

Αν $x < 1 \leq y$, τότε από το αριστερό κομμάτι παίρνουμε $f(x) > 1$, ενώ από το δεξί κομμάτι παίρνουμε $0 < f(y) \leq 1$. Άρα $f(x) > f(y)$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, άρα είναι 1-1.

Σύνολο τιμών:

- Για $x < 1$: $f(x) = x^2 - 3x + 3$. Επειδή είναι γνησίως φθίνουσα, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, παίρνει τιμές $(1, +\infty)$.
- Για $x \geq 1$: $f(x) = 1/x$, άρα παίρνει τιμές $(0, 1]$.

Ένωση:

$$f(\mathbb{R}) = (1, +\infty) \cup (0, 1] = (0, +\infty).$$

Γ4. Εμβαδόν χωρίου Ω

Για $x \geq 1$ ισχύει $f(x) = 1/x$. Η εφαπτομένη είναι $\epsilon: y = -x + 2$.

Η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο:

$$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Το χωρίο αποτελείται από δύο τμήματα:

- στο $[1, 2]$, πάνω καμπύλη είναι $y = 1/x$ και κάτω καμπύλη η ευθεία $y = -x + 2$,
- στο $[2, e]$, πάνω καμπύλη είναι $y = 1/x$ και κάτω καμπύλη ο άξονας $x'x$.

$$\begin{aligned}
 E &= \int_1^2 [1/x - (-x+2)] dx + \int_2^e 1/x dx \\
 &= \int_1^2 (1/x + x - 2) dx + \int_2^e 1/x dx \\
 &= [\ln x + x^2/2 - 2x]_1^2 + [\ln x]_2^e \\
 &= (\ln 2 + 2 - 4) - (0 + 1/2 - 2) + (1 - \ln 2) \\
 &= \ln 2 - 2 + 3/2 + 1 - \ln 2 \\
 &= 1/2.
 \end{aligned}$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$E = 1/2 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Απόδειξη ότι $\kappa=3$

Δίνεται:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(2-x) - 1/x + \kappa, \quad x \in (0, 2), \\
 \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2x]/(x-1) &= \ell \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Για να είναι το όριο πραγματικός αριθμός, ενώ ο παρονομαστής $x-1$ τείνει στο 0, πρέπει ο αριθμητής να τείνει επίσης στο 0. Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2x] = 0.$$

Η f είναι συνεχής στο 1, άρα:

$$\begin{aligned}
 f(1) - 2 &= 0, \\
 f(1) &= \ln(1) - 1 + \kappa = \kappa - 1, \\
 \kappa - 1 - 2 &= 0 \Rightarrow \kappa = 3.
 \end{aligned}$$

Δ2. Ακριβώς δύο ρίζες και απόδειξη $x_1 < 1/3$

Με $\kappa=3$ έχουμε:

$$f(x) = \ln(2-x) - 1/x + 3.$$

Παράγωγος:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -1/(2-x) + 1/x^2 \\
 &= [(2-x) - x^2]/[x^2(2-x)] \\
 &= -(x+2)(x-1)/[x^2(2-x)].
 \end{aligned}$$

Στο διάστημα $(0, 2)$ ο παρονομαστής $x^2(2-x) > 0$ και $x+2 > 0$. Άρα το πρόσημο της f' καθορίζεται από το $-(x-1)$:

- στο $(0, 1)$: $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα,
- στο $(1, 2)$: $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επίσης:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(2-x) - 1/x + 3] = -\infty, \\
 f(1) &= \ln 1 - 1 + 3 = 2 > 0, \\
 \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} [\ln(2-x) - 1/x + 3] = -\infty.
 \end{aligned}$$

Άρα, επειδή η f είναι συνεχής:

- στο $(0, 1)$, από $-\infty$ σε 2 και με γνήσια αύξηση, έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1 \in (0, 1)$,
- στο $(1, 2)$, από 2 σε $-\infty$ και με γνήσια φθίνουσα πορεία, έχει ακριβώς μία ρίζα $x_2 \in (1, 2)$.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

Για το $x_1 < 1/3$ υπολογίζουμε:

$$f(1/3) = \ln(2-1/3) - 1/(1/3) + 3 \\ = \ln(5/3) - 3 + 3 = \ln(5/3) > 0.$$

Στο $(0,1)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει μοναδική ρίζα x_1 . Επειδή $f(1/3) > 0$ και πριν από τη ρίζα η f είναι αρνητική, η ρίζα βρίσκεται αριστερά του $1/3$:

$$x_1 < 1/3.$$

Δ3. Ύπαρξη και μοναδικότητα σημείου με συγκεκριμένη κλίση

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 3f(1/3)/(1-3x_1).$$

Από το Δ2 γνωρίζουμε ότι $x_1 < 1/3$ και $f(x_1) = 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στη f στο διάστημα $[x_1, 1/3]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, 1/3]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1, 1/3)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, 1/3) \subset (0,1)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = [f(1/3) - f(x_1)] / (1/3 - x_1).$$

$$f'(\xi) = f(1/3) / (1/3 - x_1) = 3f(1/3) / (1 - 3x_1).$$

Έτσι αποδείχθηκε η ύπαρξη.

Για τη μοναδικότητα, υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο στο $(0,1)$:

$$f'(x) = 1/x^2 - 1/(2-x)$$

$$f''(x) = -2/x^3 - 1/(2-x)^2 < 0, \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. Επομένως η εξίσωση $f'(x) = \text{σταθερά}$ μπορεί να έχει το πολύ μία λύση στο $(0,1)$. Αφού ήδη βρέθηκε μία, είναι μοναδική.

Δ4. Αρχικές συναρτήσεις F και G

Έστω F και G δύο αρχικές της f στο $(0,2)$, με:

$$F(x_1) = 0, \quad G(x_2) = 0.$$

Επειδή $F' = G' = f$, ισχύει ότι F και G διαφέρουν κατά σταθερά, όμως εδώ συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώματα.

Δ4(i). Απόδειξη $F(x_2) + G(x_1) = 0$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt.$$

$$F(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt, \text{ αφού } F(x_1) = 0.$$

Επίσης:

$$G(x_2) - G(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt.$$

$$0 - G(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt, \text{ αφού } G(x_2) = 0.$$

$$G(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt.$$

$$F(x_2) + G(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = 0.$$

Δ4(ii). Ακριβώς μία λύση στο (x_1, x_2)

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$H(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι ισοδύναμη με $H(x) = 0$.

Η H είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$H'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2$$

$$H'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2.$$

Στο διάστημα (x_1, x_2) , επειδή η f έχει ρίζες x_1 και x_2 και είναι θετική ανάμεσά τους, ισχύει $f(x) > 0$. Επομένως:

$$H'(x) = (x_1 + x_2)f(x) + 2 > 0.$$

Άρα η H είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$, άρα η εξίσωση $H(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση.

Ελέγχουμε τώρα τα πρόσημα στα άκρα. Θέτουμε:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt.$$

Επειδή $f(t) > 0$ για $t \in (x_1, x_2)$, έχουμε $A > 0$. Από το Δ4(i):

$$F(x_2) = A, \quad G(x_1) = -A.$$

$$H(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1$$

$$= 0 + x_2(-A) + x_1 - x_2$$

$$= -x_2 A + x_1 - x_2 < 0.$$

$$H(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2$$

$$= x_1 A + 0 - x_1 + x_2$$

$$= x_1 A + x_2 - x_1 > 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της H στο (x_1, x_2) . Επειδή η H είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Συνεπώς η εξίσωση:

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2) .