

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

Μαθηματικά Προσανατολισμού – Αναλυτικές λύσεις

Ημερήσια και Εσπερινά Γενικά Λύκεια

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε αριθμό ζ μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = \zeta$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $f(\alpha) < \zeta < f(\beta)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = f(x) - \zeta, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Η φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον:

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) - \zeta < 0 \quad \text{και} \quad \varphi(\beta) = f(\beta) - \zeta > 0.$$

Άρα η φ παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος. Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$\varphi(x_0) = 0.$$

Επομένως:

$$f(x_0) - \zeta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \zeta.$$

Αν $f(\beta) < \zeta < f(\alpha)$, εργαζόμαστε ακριβώς όμοια, αφού τότε $\varphi(\alpha) > 0$ και $\varphi(\beta) < 0$. Άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Α2. Ορισμός κυρτότητας

Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , όταν η παράγωγός της f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

Α3. Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $a \in \Delta$, τότε η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_{[a, x]} f(t) dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Επιπλέον, αν G είναι οποιαδήποτε παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha).$$

Α4. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Σωστό	Η $g \circ f$ ορίζεται όταν υπάρχει $x \in A$ με $f(x) \in B$, δηλαδή όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
β	Λάθος	Για $x < 0$ δεν ισχύει γενικά. Π.χ. για $x = -1$ έχουμε $\eta\mu(-1) \approx -0,84 > -1$.
γ	Λάθος	Ισχύει $(\sigma\phi x)' = -1/\eta\mu^2 x$, όχι $+1/\eta\mu^2 x$.
δ	Λάθος	Ένα τοπικό μέγιστο δεν είναι υποχρεωτικά ολικό. Η πρόταση δεν ισχύει για κάθε συνάρτηση.
ε	Σωστό	Αν $f(x) \geq 0$ σε $[\alpha, \beta]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα, ως προσημασμένο

		εμβαδόν μη αρνητικής συνάρτησης, είναι ≥ 0 .
--	--	---

ΘΕΜΑ Β

Β1. Προσδιορισμός των $f=g/h$ και $r=g \cdot h$

Δίνονται:

$$g(x)=\sqrt{x+1}/\sqrt{x}, \quad h(x)=\sqrt{x-1}/\sqrt{x}, \quad x \in [1, +\infty).$$

Για τη συνάρτηση $f=g/h$ πρέπει $h(x) \neq 0$. Έχουμε:

$$h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}/\sqrt{x} \Leftrightarrow x=1.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $(1, +\infty)$. Για $x > 1$:

$$f(x)=g(x)/h(x)=(\sqrt{x+1}/\sqrt{x})/(\sqrt{x-1}/\sqrt{x})=(x+1)/(x-1).$$

Για τη συνάρτηση $r=g \cdot h$ έχουμε πεδίο ορισμού $[1, +\infty)$ και:

$$r(x)=(\sqrt{x+1}/\sqrt{x})(\sqrt{x-1}/\sqrt{x})=x-1/x.$$

Άρα:

$$f(x)=(x+1)/(x-1), \quad x > 1, \quad \text{και} \quad r(x)=x-1/x, \quad x \geq 1.$$

Β2. Αντιστρεψιμότητα της f και απόδειξη ότι $f^{-1}=f$

Για $x > 1$ έχουμε:

$$f(x)=(x+1)/(x-1).$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x)=((x-1)-(x+1))/(x-1)^2 = -2/(x-1)^2 < 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, επομένως είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=1.$$

Επειδή είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, έχει σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$. Άρα $f:(1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$.

Για να βρούμε την αντίστροφη, θέτουμε $y=f(x)$:

$$y=(x+1)/(x-1).$$

Λύνουμε ως προς x :

$$y(x-1)=x+1 \Leftrightarrow yx-y=x+1 \Leftrightarrow x(y-1)=y+1 \Leftrightarrow x=(y+1)/(y-1).$$

Άρα:

$$f^{-1}(y)=(y+1)/(y-1)=f(y), \quad y > 1.$$

Επομένως:

$$f^{-1}=f.$$

Β3. Ασύμπτωτες της r

Η r έχει τύπο:

$$r(x)=x-1/x, \quad x \geq 1.$$

Στο $x=1$ η συνάρτηση ορίζεται και $r(1)=0$, άρα δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο αριστερό άκρο του πεδίου ορισμού.

Εξετάζουμε ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = +\infty,$$

άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη. Για πλάγια ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} r(x)/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1/x)/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-1/x^2) = 1,$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1/x) = 0.$$

Άρα η μοναδική ασύμπτωτη της Cr είναι:

$$y = x.$$

B4. Λύση της εξίσωσης

Η εξίσωση είναι:

$$(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x).$$

Επειδή $f^{-1} = f$ και $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x > 1$, παίρνουμε:

$$x^2 = 1 + 4(x-1/x), \quad x > 1.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $x > 0$:

$$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0.$$

Παραγοντοποιούμε:

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = x^2(x-4) - 1(x-4) = (x^2-1)(x-4) = (x-1)(x+1)(x-4).$$

Άρα:

$$x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 4.$$

Επειδή πρέπει $x > 1$, η μοναδική λύση είναι:

$$x = 4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Απόδειξη ότι $\lambda = 0$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Το μόνο σημείο όπου χρειάζεται έλεγχος είναι το $x = 2$.

Για $0 \leq x < 2$:

$$f(x) = -2x + 4 + e^\lambda.$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4 + 4 + e^\lambda = e^\lambda.$$

Για $x \geq 2$:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3 + \lambda,$$

$$f(2) = -4 + 8 - 3 + \lambda = 1 + \lambda.$$

Από τη συνέχεια στο $x = 2$:

$$e^\lambda = 1 + \lambda.$$

Όμως για κάθε πραγματικό λ ισχύει $e^\lambda \geq 1 + \lambda$, με ισότητα μόνο για $\lambda = 0$. Άρα:

$$\lambda = 0.$$

Γ2. Μονοτονία και ακρότατα

Με $\lambda = 0$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Στο $[0,2]$ ο τύπος $f(x)=-2x+5$ είναι γνησίως φθίνων, αφού η κλίση είναι $-2<0$.

Στο $[2,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=-2x+4 = -2(x-2).$$

Για $x>2$ ισχύει $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

Ελέγχουμε και το πέρασμα από το ένα κομμάτι στο άλλο. Για $x<2$ έχουμε $f(x)>1$, ενώ για $y\geq 2$ έχουμε $f(y)\leq 1$. Άρα για κάθε $x<2\leq y$ ισχύει $f(x)>f(y)$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $[0,+\infty)$.

Ακρότατα: επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, παίρνει ολικό μέγιστο στο αριστερό άκρο $x=0$:

$$f(0)=5.$$

Δεν έχει ολικό ελάχιστο, διότι:

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}(-x^2+4x-3)=-\infty.$$

Στο $x=2$ δεν υπάρχει ακρότατο, επειδή η συνάρτηση συνεχίζει να φθίνει πριν και μετά το 2.

Γ3. Θεώρημα Μέσης Τιμής και παράλληλη εφαπτομένη

i) Για να εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,3]$, η f πρέπει να είναι συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$. Όμως στο $x=2$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού:

$$f'_-(2)=-2,$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\rightarrow 2^+}(-2x+4)=0.$$

Επειδή $f'_-(2)\neq f'_+(2)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=2$. Άρα δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,3]$.

ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0))$ και $E(3,f(3))$ έχει κλίση:

$$m = (f(3)-f(0))/(3-0).$$

Υπολογίζουμε:

$$f(0)=5, \quad f(3)=-9+12-3=0.$$

$$m=(0-5)/3=-5/3.$$

Ζητάμε $\xi\in(0,3)$, $\xi\neq 2$, ώστε:

$$f'(\xi)=-5/3.$$

Για $0<\xi<2$, έχουμε $f'(\xi)=-2$, που δεν ισούται με $-5/3$.

Για $2<\xi<3$, έχουμε $f'(\xi)=-2\xi+4$. Άρα:

$$-2\xi+4=-5/3 \Leftrightarrow -2\xi=-17/3 \Leftrightarrow \xi=17/6.$$

Επειδή $17/6\in(2,3)$, υπάρχει τέτοιο σημείο και είναι:

$$\xi=17/6.$$

Γ4. Ρυθμός μεταβολής της γωνίας

Το κινητό ξεκινά από το $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Άρα η τετμημένη του είναι σταθερά $x=2$ και η τεταγμένη του είναι $y=y(t)$.

Δίνεται σταθερή ταχύτητα:

$$dy/dt = 0,5.$$

Το κινητό συναντά τη γραφική παράσταση της f όταν βρίσκεται στο σημείο με $x=2$. Επειδή $f(2)=1$, η συνάντηση γίνεται στο $M(2,1)$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές $O(0,0)$, $A(2,0)$, $M(2,y)$, ισχύει:

$$\tan\omega = y/2.$$

Παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο t :

$$\sec^2 \omega \cdot d\omega/dt = (1/2) \cdot dy/dt.$$

$$\sec^2 \omega \cdot d\omega/dt = (1/2) \cdot 0,5 = 1/4.$$

Τη στιγμή της συνάντησης $y=1$, άρα:

$$\tan \omega = 1/2 \Rightarrow \sec^2 \omega = 1 + \tan^2 \omega = 1 + 1/4 = 5/4.$$

Επομένως:

$$(5/4) \cdot d\omega/dt = 1/4 \Leftrightarrow d\omega/dt = 1/5.$$

Άρα ο ρυθμός αύξησης της γωνίας είναι:

$$d\omega/dt = 1/5 \text{ rad/s.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Απόδειξη ότι $\alpha=1$

Δίνεται:

$$f(x) = (\ln x + \alpha x)/x, \quad x > 0.$$

Γράφουμε:

$$f(x) = \ln x/x + \alpha.$$

Μελετούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x/x$. Έχουμε:

$$\varphi'(x) = (1 - \ln x)/x^2.$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$. Επομένως έχει μέγιστη τιμή:

$$\varphi(e) = 1/e.$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x/x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x/x = 0.$$

Άρα το σύνολο τιμών της φ είναι:

$$\varphi((0, +\infty)) = (-\infty, 1/e].$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f((0, +\infty)) = (-\infty, \alpha + 1/e].$$

Δίνεται ότι:

$$f((0, +\infty)) = (-\infty, 1 + 1/e].$$

Άρα:

$$\alpha + 1/e = 1 + 1/e \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Δ2. Μοναδική ρίζα της $f(x)=0$

Με $\alpha=1$ έχουμε:

$$f(x) = (\ln x + x)/x = 1 + \ln x/x, \quad x > 0.$$

Η εξίσωση $f(x)=0$ ισοδυναμεί με:

$$(\ln x + x)/x = 0 \Leftrightarrow \ln x + x = 0.$$

Θέτουμε:

$$\psi(x) = \ln x + x, \quad x > 0.$$

Τότε:

$$\psi'(x) = 1/x + 1 > 0.$$

Άρα η ψ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η εξίσωση $\psi(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Υπολογίζουμε:

$$\psi(1/2) = \ln(1/2) + 1/2 = -\ln 2 + 1/2 < 0,$$

$$\psi(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0.$$

Επειδή η ψ είναι συνεχής στο $[1/2, 1]$, από Bolzano υπάρχει ρίζα $x_0 \in (1/2, 1)$. Επειδή η ψ είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Δ3. Εξίσωση $f(x) = f(4)$ και ανίσωση $2^x \leq x^2$

i) Έχουμε:

$$f(x) = 1 + \ln x / x.$$

Από το Δ1 ξέρουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$, επειδή:

$$f'(x) = (1 - \ln x) / x^2.$$

Υπολογίζουμε:

$$f(2) = 1 + \ln 2 / 2,$$

$$f(4) = 1 + \ln 4 / 4 = 1 + 2 \ln 2 / 4 = 1 + \ln 2 / 2.$$

Άρα $f(2) = f(4)$.

Επειδή $2 \in (0, e)$, στο διάστημα $(0, e)$ λόγω γνησίως αύξησης υπάρχει μία μόνο λύση, η $x = 2$. Επειδή $4 \in (e, +\infty)$, στο διάστημα $(e, +\infty)$ λόγω γνησίως φθίνσης υπάρχει μία μόνο λύση, η $x = 4$. Άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

ii) Λύνουμε την ανίσωση:

$$2^x \leq x^2, \quad x > 0.$$

Επειδή $x > 0$, μπορούμε να λογαριθμήσουμε:

$$2^x \leq x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x.$$

Διαιρούμε με $2x > 0$:

$$\ln 2 / 2 \leq \ln x / x.$$

Δηλαδή:

$$1 + \ln 2 / 2 \leq 1 + \ln x / x \Leftrightarrow f(2) \leq f(x).$$

Άρα ζητάμε:

$$f(x) \geq f(2).$$

Από τη μονοτονία της f και επειδή $f(2) = f(4)$, προκύπτει ότι αυτό ισχύει ακριβώς για:

$$x \in [2, 4].$$

Δ4. Εμβαδόν χωρίου Ω

Δίνεται:

$$g(x) = f(e^x) \cdot (1 - x) / e^x.$$

Επειδή:

$$f(e^x) = 1 + \ln(e^x) / e^x = 1 + x / e^x,$$

έχουμε:

$$g(x) = (1 + x / e^x) \cdot (1 - x) / e^x.$$

Θέτουμε:

$$u(x)=x/e^x.$$

Τότε:

$$u'(x)=(1-x)/e^x.$$

Άρα:

$$g(x)=(1+u(x))u'(x).$$

Μια παράγουσα της g είναι:

$$G(x)=u(x)+u^2(x)/2 = x/e^x + x^2/(2e^{2x}).$$

Στο διάστημα $[-\ln 2, 0]$ έχουμε $u(-\ln 2)=-2\ln 2$ και $u(0)=0$. Η g μηδενίζεται όταν:

$$1+u(x)=0 \Leftrightarrow u(x)=-1.$$

Αυτό αντιστοιχεί στη μοναδική ρίζα του $\Delta 2$, με αλλαγή μεταβλητής $t=e^x$. Έστω c το σημείο του $[-\ln 2, 0]$ όπου $u(c)=-1$. Τότε:

$$G(c)=-1+1/2=-1/2.$$

Επίσης:

$$G(-\ln 2)=-2\ln 2 + ((-2\ln 2)^2)/2 = -2\ln 2 + 2(\ln 2)^2, \\ G(0)=0.$$

Στο $[-\ln 2, c]$ η g είναι αρνητική, ενώ στο $[c, 0]$ είναι θετική. Επομένως το εμβαδόν είναι:

$$E = -\int_{-\ln 2, c} g(x) dx + \int_{c, 0} g(x) dx \\ E = -(G(c)-G(-\ln 2)) + (G(0)-G(c)) \\ E = G(-\ln 2) + G(0) - 2G(c).$$

Άρα:

$$E = (-2\ln 2 + 2(\ln 2)^2) + 0 - 2(-1/2) \\ E = 1 - 2\ln 2 + 2(\ln 2)^2.$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$E = 1 - 2\ln 2 + 2(\ln 2)^2 \text{ τετρ. μονάδες.}$$