

Αναλυτικές λύσεις - Μαθηματικά Προσανατολισμού 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Παράγουσες

Έστω ότι F είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα Δ . Άρα, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$F'(x) = f(x)$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, με $c \in \mathbb{R}$, είναι επίσης παράγουσα της f .

$$G'(x) = (F(x)+c)' = F'(x)+0 = f(x)$$

Άρα η G είναι παράγουσα της f στο Δ .

Αν τώρα G είναι οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο Δ , τότε:

$$G'(x)=f(x) \text{ και } F'(x)=f(x)$$

Επομένως:

$$(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

Άρα η συνάρτηση $G-F$ είναι σταθερή στο διάστημα Δ . Επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$G(x)-F(x)=c \Rightarrow G(x)=F(x)+c$$

Συμπέρασμα: όλες και μόνο οι παράγουσες της f στο Δ είναι οι συναρτήσεις $F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

A2. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\eta$$

Δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στις τιμές της στα άκρα του διαστήματος.

A3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω πλευρικά όρια είναι $+\infty$ ή $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

A4. Σωστό - Λάθος

- α) Σωστό. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f .
- β) Σωστό. Η σύνθεση συναρτήσεων είναι προσεταιριστική, όπου ορίζεται: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- γ) Λάθος. Για $n \in \mathbb{N}^*$, επειδή $2n$ είναι άρτιος, όταν $x \rightarrow 0^-$ ισχύει $x^{2n} \rightarrow 0^+$, άρα $1/x^{2n} \rightarrow +\infty$ και όχι $-\infty$.
- δ) Λάθος. Αν η f είναι κυρτή, η εφαπτομένη βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση, εκτός από το σημείο επαφής.
- ε) Σωστό. Είναι ο κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται $f(x)=x^3+\alpha x^2+9x-3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

B1. Εύρεση του α

Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ και είναι παραγωγίσιμη, ισχύει απαραίτητα $f'(1)=0$.

$$f'(x)=3x^2+2\alpha x+9$$

$$f'(1)=3+2\alpha+9=12+2\alpha$$

$$12+2\alpha=0 \Rightarrow 2\alpha=-12 \Rightarrow \alpha=-6$$

Άρα:

$$\alpha = -6$$

B2. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες

Για $\alpha=-6$ έχουμε:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$$

Η f είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θα εντοπίσουμε αλλαγές προσήμου σε θετικά διαστήματα.

$$f(0)=-3 < 0$$

$$f(1)=1-6+9-3=1 > 0$$

$$f(3)=27-54+27-3=-3 < 0$$

$$f(6)=216-216+54-3=51 > 0$$

Άρα, με το Θεώρημα Bolzano:

- στο $(0,1)$ υπάρχει μία ρίζα, αφού $f(0)<0$ και $f(1)>0$,
- στο $(1,3)$ υπάρχει μία ρίζα, αφού $f(1)>0$ και $f(3)<0$,
- στο $(3,6)$ υπάρχει μία ρίζα, αφού $f(3)<0$ και $f(6)>0$.

Τα διαστήματα είναι ξένα μεταξύ τους και όλα περιέχουν θετικούς αριθμούς. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Επειδή η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, δεν μπορεί να έχει περισσότερες από τρεις πραγματικές ρίζες. Άρα έχει ακριβώς τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

B3. Κυρτότητα και σημεία καμπής

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$f''(x)=6x-12=6(x-2)$$

Μελετούμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου:

- Για $x<2$: $f''(x)<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2)$.
- Για $x>2$: $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$.

Στο $x=2$ η δεύτερη παράγωγος αλλάζει πρόσημο, άρα υπάρχει σημείο καμπής.

$$f(2)=8-24+18-3=-1$$

Άρα το σημείο καμπής είναι:

$$K(2, -1)$$

B4. Οι εφαπτόμενες τέμνονται στον άξονα $y'y$

Έχουμε $g(x)=x+f(x)$, άρα:

$$g'(x)=1+f'(x)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) = [1 + f'(\xi)](x - \xi)$$

Για να δείξουμε ότι τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x=0$.

Στην πρώτη εφαπτομένη, για $x=0$:

$$y_1 = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Στη δεύτερη εφαπτομένη, για $x=0$:

$$y_2 = g(\xi) - \xi [1 + f'(\xi)]$$

$$y_2 = \xi + f(\xi) - \xi - \xi f'(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Άρα $y_1 = y_2$. Επομένως οι δύο εφαπτόμενες περνούν από το ίδιο σημείο του άξονα $y'y$:

$$(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Συνέχεια αλλά όχι παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$

Συνέχεια

Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια και την τιμή της συνάρτησης στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0} = 0$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Παραγωγισιμότητα

Εξετάζουμε τους πλευρικούς λόγους μεταβολής.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot (\eta \mu x / x) = 1 \cdot 1 = 1$$

Από δεξιά:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Οι πλευρικές παράγωγοι δεν είναι ίσες και μάλιστα η δεξιά δεν είναι πραγματικός αριθμός. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης

Για $x \rightarrow -\infty$

Για $x < 0$ έχουμε $f(x) = e^x \eta \mu x$. Επειδή $-1 \leq \eta \mu x \leq 1$, ισχύει:

$$-e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$$

Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $e^x \rightarrow 0$. Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Επομένως υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη προς τα αριστερά:

$$y = 0$$

Για $x \rightarrow +\infty$

Για $x \geq 0$ έχουμε $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$. Ελέγχουμε αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη $y = ax + \beta$.

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x}/x$$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + 1/x} = 1$$

Στη συνέχεια:

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x]$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + x) - x^2] / [\sqrt{x^2 + x} + x]$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} x / [\sqrt{x^2 + x} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 / [\sqrt{1 + 1/x} + 1] = 1/2$$

Άρα υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη προς τα δεξιά:

$$y = x + 1/2$$

Δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$, διότι η f είναι συνεχής εκεί.

Γ3. Τομή με την ευθεία $y = x + 1/2$ σε σημείο με $\xi \in (-\pi, 0)$

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \xi + 1/2$$

Στο διάστημα $(-\pi, 0)$ ισχύει $f(x) = e^x \eta \mu x$. Ορίζουμε:

$$\phi(x) = e^x \eta \mu x - x - 1/2, \quad x \in [-\pi, 0]$$

Η ϕ είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$. Υπολογίζουμε:

$$\phi(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) - (-\pi) - 1/2 = \pi - 1/2 > 0$$

$$\phi(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - 1/2 = -1/2 < 0$$

Άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $\phi(\xi) = 0$, δηλαδή:

$$e^{\xi} \eta \mu \xi = \xi + 1/2$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x + 1/2$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Ρυθμός μεταβολής τεταγμένης και τετμημένης

Για $x \geq 0$ το κινητό κινείται πάνω στην καμπύλη:

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

Με αλυσίδα παραγώγισης ως προς τον χρόνο t :

$$y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t)$$

Ζητείται αν μπορεί να ισχύει $y'(t) = x'(t)$. Επειδή $x'(t) > 0$, μπορούμε να διαιρέσουμε με $x'(t)$. Άρα θα έπρεπε:

$$f'(x(t)) = 1$$

Για $x > 0$:

$$f'(x) = (2x + 1) / (2\sqrt{x^2 + x})$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 1$:

$$(2x + 1) / (2\sqrt{x^2 + x}) = 1$$

$$2x + 1 = 2\sqrt{x^2 + x}$$

Και τα δύο μέλη είναι θετικά, άρα υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$(2x+1)^2 = 4(x^2+x)$$

$$4x^2+4x+1 = 4x^2+4x$$

$$1=0, \text{ άτοπο}$$

Άρα δεν υπάρχει $x>0$ για το οποίο $f'(x)=1$. Στο $x=0$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη, οπότε δεν δίνει αποδεκτή χρονική στιγμή ισότητας ρυθμών.

Συμπέρασμα: δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και παράγουσα F της f , με:

$$x f(x) = 2F(x) \ln x, \quad x > 0$$

Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y=2x$, άρα:

$$f'(1)=2$$

Δ1. Η $g(x)=F(x)/x^{\ln x}$ είναι σταθερή

Επειδή F είναι παράγουσα της f , ισχύει $F'(x)=f(x)$. Θέτουμε:

$$g(x)=F(x)/x^{\ln x}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$x^{\ln x} = e^{\{(\ln x)^2\}}$$

Άρα:

$$(x^{\ln x})' = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x / x$$

Παραγωγίζουμε τη g :

$$g'(x) = [F'(x)x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'] / (x^{\ln x})^2$$

$$g'(x) = [f(x)x^{\ln x} - F(x)x^{\ln x} \cdot 2 \ln x / x] / (x^{\ln x})^2$$

$$g'(x) = [f(x) - 2F(x) \ln x / x] / x^{\ln x}$$

Από τη δοθείσα σχέση $x f(x) = 2F(x) \ln x$ παίρνουμε:

$$f(x) = 2F(x) \ln x / x$$

Άρα:

$$g'(x) = 0$$

Επομένως η g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Υπολογισμός ορίου, $F(1)$ και τύπος της F

i) Υπολογισμός του $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)/\ln x$ για $x \rightarrow 1$

Από τη σχέση $x f(x) = 2F(x) \ln x$, για $x \neq 1$, έχουμε:

$$f(x)/\ln x = 2F(x)/x$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)/\ln x = \lim_{x \rightarrow 1} 2F(x)/x = 2F(1)$$

Χρειαζόμαστε την τιμή $F(1)$, την οποία βρίσκουμε στο επόμενο βήμα.

ii) Απόδειξη ότι $F(1)=1$ και $F(x)=x^{\ln x}$

Βάζουμε $x=1$ στη σχέση $x f(x) = 2F(x) \ln x$:

$$1 \cdot f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$$

$$f(1) = 0$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης $x f(x) = 2F(x) \ln x$:

$$(x f(x))' = (2F(x) \ln x)'$$

$$f(x) + x f'(x) = 2F'(x) \ln x + 2F(x)/x$$

$$f(x) + x f'(x) = 2f(x) \ln x + 2F(x)/x$$

Θέτουμε $x=1$:

$$f(1) + f'(1) = 2f(1) \ln 1 + 2F(1)$$

$$0 + 2 = 0 + 2F(1)$$

$$F(1) = 1$$

Άρα από το προηγούμενο ερώτημα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)/\ln x = 2F(1) = 2$$

Από το Δ1 η g είναι σταθερή, άρα για κάθε $x > 0$:

$$F(x)/x^{\ln x} = \text{σταθερά}$$

Η σταθερά είναι η τιμή στο $x=1$:

$$g(1) = F(1)/1^{\ln 1} = 1/1 = 1$$

Επομένως:

$$F(x) = x^{\ln x}, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Δ3. Μονοτονία της F και λύση εξίσωσης

Μονοτονία

$$F(x) = x^{\ln x} = e^{\{(\ln x)^2\}}$$

$$F'(x) = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x / x$$

Επειδή $x^{\ln x} > 0$ και $x > 0$, το πρόσημο της F' καθορίζεται από το $\ln x$.

- Για $0 < x < 1$: $\ln x < 0$, άρα $F'(x) < 0$. Η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$.
- Για $x=1$: $F'(1) = 0$.
- Για $x > 1$: $\ln x > 0$, άρα $F'(x) > 0$. Η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Άρα η F έχει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, με $F(1)=1$.

Εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$

Θέτουμε $u = F(x) = x^{\ln x} = e^{\{(\ln x)^2\}}$. Τότε $u \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

$$F(x^2) = (x^2)^{\ln(x^2)} = e^{\{[\ln(x^2)]^2\}} = e^{\{(2 \ln x)^2\}} = e^{\{4(\ln x)^2\}} = u^4$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$u^4 = u - (x-1)^2$$

Όμως $u \geq 1$, άρα $u^4 \geq u$, ενώ $u - (x-1)^2 \leq u$. Για να ισχύει ισότητα, πρέπει ταυτόχρονα:

$$u^4 = u \quad \text{και} \quad (x-1)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1$$

Πράγματι, για $x=1$ ισχύει:

$$F(1^2) = F(1) = 1 \quad \text{και} \quad F(1) - (1-1)^2 = 1$$

Άρα η μοναδική λύση είναι:

$$x=1$$

Δ4. Απόδειξη ότι $E > 2e-3$

Στο διάστημα $[1, e]$ έχουμε $F(x) = x^{\ln x} > 0$. Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e x^{\ln x} dx$$

Επειδή:

$$x^{\ln x} = e^{\{(\ln x)^2\}}$$

και για κάθε $u > 0$ ισχύει $e^u > 1+u$, παίρνουμε για $x \in (1, e]$:

$$e^{\{(\ln x)^2\}} > 1 + (\ln x)^2$$

Άρα:

$$E > \int_1^e [1 + (\ln x)^2] dx$$

Υπολογίζουμε:

$$\int_1^e 1 dx = e - 1$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e(1 - 2 + 2) - 1(0 - 0 + 2) = e - 2$$

Επομένως:

$$\int_1^e [1 + (\ln x)^2] dx = (e - 1) + (e - 2) = 2e - 3$$

Άρα τελικά:

$$E > 2e - 3$$