

Αναλυτικές λύσεις - Μαθηματικά Προσανατολισμού 2026

Πανελλαδικές εξετάσεις - Ημερήσια & Εσπερινά ΓΕΛ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη: αν $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο, τότε η f είναι σταθερή

Έστω x_1, x_2 δύο τυχαία σημεία του διαστήματος Δ , με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο Δ , είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$. Επειδή $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) .

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$(f(x_2)-f(x_1))/(x_2-x_1) = f'(\xi).$$

Όμως $f'(\xi)=0$, άρα:

$$(f(x_2)-f(x_1))/(x_2-x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_2)=f(x_1).$$

Επομένως η f παίρνει την ίδια τιμή σε οποιαδήποτε δύο σημεία του Δ , άρα είναι σταθερή σε όλο το Δ .

A2. Κριτήριο παρεμβολής

Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι ορισμένες σε ένα σύνολο της μορφής A κοντά στο x_0 και ισχύει:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

για κάθε x κοντά στο x_0 , με $x \neq x_0$, και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell,$$

τότε ισχύει και:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

A3. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα

Μια συνάρτηση F ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ , όταν η F είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

A4. Σωστό - Λάθος

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α	Λάθος	Μια συνάρτηση είναι 1-1 όταν διαφορετικά σημεία του πεδίου ορισμού έχουν διαφορετικές τιμές. Άρα δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης με ίδια τεταγμένη.
β	Σωστό	Η παραγωγισιμότητα σε σημείο συνεπάγεται συνέχεια στο σημείο.
γ	Σωστό	Αν $f''(x)>0$ στο εσωτερικό διαστήματος, τότε η f είναι κυρτή στο διάστημα.
δ	Σωστό	Είναι ο κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.
ε	Λάθος	Για $f(x)=\sigma\phi x$ ισχύει $(\sigma\phi x)' = -1/\eta\mu^2 x$, όχι $+1/\eta\mu^2 x$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Προσδιορισμός της $h=f \circ g$

Δίνονται:

$$f(x)=2\ln(x-1), \quad x \in (1, +\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{x-2}+1, \quad x \in [2, +\infty).$$

Για να ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ πρέπει $g(x) \in (1, +\infty)$.

$$g(x) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}+1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της h είναι το $(2, +\infty)$. Για $x > 2$ έχουμε:

$$h(x)=f(g(x))=2\ln(g(x)-1)=2\ln(\sqrt{x-2}).$$

$$h(x)=2 \cdot (1/2)\ln(x-2)=\ln(x-2).$$

Επομένως:

$$h:(2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x)=\ln(x-2).$$

B2. Αντιστροφή της h και εύρεση της h^{-1}

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ και:

$$h'(x)=1/(x-2) > 0, \quad \text{για κάθε } x > 2.$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y=h(x)$:

$$y=\ln(x-2) \Leftrightarrow e^y=x-2 \Leftrightarrow x=e^y+2.$$

Άρα η αντίστροφη είναι:

$$h^{-1}(x)=e^x+2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

B3. Υπολογισμός ορίου

Ζητείται:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \cdot f(x) / (x-2).$$

Έχουμε $h(x)=\ln(x-2)$ και $f(x)=2\ln(x-1)$. Θέτουμε $t=x-2$, οπότε $t \rightarrow 0^+$ και $x-1=1+t$. Τότε:

$$f(x)/(x-2) = 2\ln(1+t)/t.$$

Επειδή $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)/t = 1$, παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)/(x-2) = 2.$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty.$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \cdot f(x) / (x-2) = -\infty.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εύρεση των κ και μ

Δίνεται:

$$f(x)=(\kappa x^3 + \mu x)/(x^2 + 1).$$

Για $x \rightarrow +\infty$ έχουμε:

$$f(x) = (\kappa x^3 + \mu x) / (x^2 + 1) \sim \kappa x.$$

Για να έχει η f οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, πρέπει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός. Αν $\kappa \neq 0$, τότε $f(x) \sim \kappa x$ και το όριο είναι άπειρο. Άρα:

$$\kappa = 0.$$

Τότε:

$$f(x) = \mu x / (x^2 + 1).$$

Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων. Πράγματι $f(0)=0$, άρα το σημείο επαφής είναι το $O(0,0)$. Για να είναι εφαπτομένη η $y=x$, πρέπει η κλίση της f στο 0 να είναι 1:

$$f'(0)=1.$$

Υπολογίζουμε:

$$f'(x) = \mu(1-x^2)/(x^2+1)^2.$$

$$f'(0) = \mu.$$

Άρα $\mu=1$. Επομένως:

$$\kappa=0, \mu=1, f(x)=x/(x^2+1).$$

Γ2. Μονοτονία, ακρότατα, σύνολο τιμών και πλήθος ριζών

Για $f(x)=x/(x^2+1)$, έχουμε:

$$f'(x) = ((x^2+1)-2x^2)/(x^2+1)^2 = (1-x^2)/(x^2+1)^2.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα το πρόσημο της f' καθορίζεται από το $1-x^2$.

Διάστημα	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Πρόσημο f'	-	+	-
Μονοτονία f	φθίνουσα	αύξουσα	φθίνουσα

Άρα η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$, αύξουσα στο $(-1, 1)$ και φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Στα $x=-1$ και $x=1$ αλλάζει το πρόσημο της f' , άρα έχουμε:

$$f(-1) = -1/2 \Rightarrow \text{τοπικό και ολικό ελάχιστο.}$$

$$f(1) = 1/2 \Rightarrow \text{τοπικό και ολικό μέγιστο.}$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Με βάση τη μονοτονία και τα ακρότατα, το σύνολο τιμών είναι:

$$f(\mathbb{R}) = [-1/2, 1/2].$$

Για την εξίσωση:

$$f(x) = 1/2 + \alpha^2$$

το δεξί μέλος είναι πάντα $\geq 1/2$. Επειδή η μέγιστη τιμή της f είναι $1/2$:

- αν $\alpha=0$, τότε $1/2 + \alpha^2 = 1/2$ και η εξίσωση έχει μία ρίζα, την $x=1$.
- αν $\alpha \neq 0$, τότε $1/2 + \alpha^2 > 1/2$ και η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.

Γ3. Ολοκληρώματα Iv

Ορίζεται:

$$I_v = \int_0^1 x^{2v+1} / (x^2+1) dx, \quad v \in \mathbb{N}.$$

Για το άθροισμα $I_v + I_{v+1}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 x^{2n+1} / (x^2+1) dx + \int_0^1 x^{2n+3} / (x^2+1) dx \\ &= \int_0^1 [x^{2n+1} + x^{2n+3}] / (x^2+1) dx \\ &= \int_0^1 x^{2n+1} (1+x^2) / (x^2+1) dx \\ &= \int_0^1 x^{2n+1} dx = [x^{2n+2} / (2n+2)]_0^1 = 1 / (2n+2). \end{aligned}$$

Άρα:

$$I_n + I_{n+1} = 1 / (2n+2).$$

Υπολογίζουμε τα πρώτα ολοκληρώματα.

$$I_0 = \int_0^1 x / (x^2+1) dx = (1/2) \ln(x^2+1) |_0^1 = (1/2) \ln 2.$$

$$I_0 + I_1 = 1/2 \Rightarrow I_1 = 1/2 - (1/2) \ln 2.$$

$$I_1 + I_2 = 1/4 \Rightarrow I_2 = 1/4 - I_1 = (1/2) \ln 2 - 1/4.$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$I_0 = (\ln 2) / 2, \quad I_1 = (1 - \ln 2) / 2, \quad I_2 = (\ln 2) / 2 - 1/4.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ύπαρξη και μοναδικότητα του $x_1 \in (-1, 0)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = g(x) + x.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής. Επομένως η φ είναι συνεχής. Εξετάζουμε τις τιμές στα άκρα του $[-1, 0]$:

$$\varphi(-1) = g(-1) - 1 < 0, \text{ επειδή } 0 < g(-1) < 1.$$

$$\varphi(0) = g(0) > 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε:

$$\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0.$$

Για τη μοναδικότητα:

$$\varphi'(x) = g'(x) + 1.$$

Δίνεται ότι $g'(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\varphi'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η φ' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα η φ είναι γνησίως μονότονη και επομένως έχει το πολύ μία ρίζα.

Αφού υπάρχει ρίζα και είναι το πολύ μία, η ρίζα x_1 είναι μοναδική.

Δ2. Απόδειξη ότι $\kappa=3$

Δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη και:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, & x \in [0, \pi/2) \end{cases}$$

Στο $x=0$ έχουμε $f(0)=0$ από τον δεύτερο κλάδο. Υπολογίζουμε τις πλευρικές παραγώγους.

Αριστερή παράγωγος:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2(g(x) + x) - 0] / x = \lim_{x \rightarrow 0^-} x(g(x) + x) = 0.$$

Δεξιά παράγωγος:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x) - 0] / x \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x / x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (\varepsilon\varphi x / x) - \kappa = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, οι δύο πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες:

$$0=3-\kappa \Rightarrow \kappa=3.$$

Δ3. Πρόσημο της f στο $[0, \pi/2)$ και μοναδικότητα ρίζας της $3f(x)=\pi$

Για $x \in [0, \pi/2)$, μετά το Δ2 έχουμε:

$$f(x)=2\eta\mu x+\epsilon\phi x-3x.$$

Παράγωγος:

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+1/\sigma\upsilon\nu^2 x-3.$$

Δεύτερη παράγωγος:

$$f''(x)=-2\eta\mu x+2\epsilon\phi x/\sigma\upsilon\nu^2 x=2\eta\mu x(1/\sigma\upsilon\nu^3 x-1).$$

Για $x \in [0, \pi/2)$, έχουμε $\eta\mu x \geq 0$ και $0 < \sigma\upsilon\nu x \leq 1$, άρα $1/\sigma\upsilon\nu^3 x - 1 \geq 0$. Επομένως:

$$f''(x) \geq 0.$$

Άρα η f' είναι αύξουσα. Επειδή:

$$f'(0)=2 \cdot 1 + 1 - 3 = 0,$$

παίρνουμε $f'(x) \geq 0$ στο $[0, \pi/2)$. Άρα η f είναι αύξουσα και:

$$f(x) \geq f(0) = 0.$$

Άρα αποδείχθηκε ότι $f(x) \geq 0$ στο $[0, \pi/2)$.

Για την εξίσωση $3f(x)=\pi$, ισοδύναμα $f(x)=\pi/3$. Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi/2)$. Επιπλέον:

$$f(0)=0 < \pi/3,$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x) = +\infty, \text{ λόγω της } \epsilon\phi x.$$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία λύση $x_2 \in (0, \pi/2)$. Για $x > 0$ ισχύει $f''(x) > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi/2)$. Επομένως η λύση είναι μοναδική.

Δ4. Πρόσημο στο $[x_1, 0]$ και ισεμβαδικά χωρία

i) Στο διάστημα $[x_1, 0]$ ισχύει για τον πρώτο κλάδο:

$$f(x)=x^2(g(x)+x)=x^2\varphi(x).$$

Από το Δ1 η φ έχει μοναδική ρίζα το x_1 και είναι γνησίως μονότονη. Επειδή $\varphi(0)=g(0)>0$, στο $[x_1, 0]$ ισχύει:

$$\varphi(x)=g(x)+x \geq 0.$$

Επίσης $x^2 \geq 0$. Άρα:

$$f(x)=x^2(g(x)+x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [x_1, 0].$$

ii) Από το Δ3ii έχουμε $3f(x_2)=\pi$, άρα:

$$f(x_2)=\pi/3.$$

Το χωρίο Ω έχει αριστερό τμήμα πάνω από το $[x_1, 0]$ και δεξί τμήμα πάνω από το $[0, \pi/3]$. Επειδή ο άξονας $y'y$ τα χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά χωρία:

$$\int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^2(g(x)+x) dx = \int_{[0 \rightarrow \pi/3]} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx.$$

Υπολογίζουμε το δεξί ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} & \int_{[0 \rightarrow \pi/3]} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx \\ &= [-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - (3/2)x^2]_0^{(\pi/3)} \\ &= (-1 + \ln 2 - \pi^2/6) - (-2) \\ &= 1 + \ln 2 - \pi^2/6. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^2(g(x)+x) dx = 1+\ln 2-\pi^2/6.$$

Αναπτύσσουμε το αριστερό μέλος:

$$\int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^2 g(x) dx + \int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^3 dx = 1+\ln 2-\pi^2/6.$$

$$\int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^3 dx = [x^4/4]_{x_1}^0 = -x_1^4/4.$$

Άρα:

$$\int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^2 g(x) dx - x_1^4/4 = 1+\ln 2-\pi^2/6,$$

$$\int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^2 g(x) dx = 1+\ln 2-\pi^2/6 + x_1^4/4. \quad (1)$$

Τώρα εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στο ζητούμενο ολοκλήρωμα:

$$J = \int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^3 g'(x) dx.$$

Με $u=x^3$ και $dv=g'(x)dx$, έχουμε $du=3x^2dx$ και $v=g(x)$. Άρα:

$$J = [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{[x_1 \rightarrow 0]} 3x^2 g(x) dx.$$

Επειδή $g(x_1)+x_1=0$, έχουμε $g(x_1)=-x_1$. Επομένως:

$$[x^3 g(x)]_{x_1}^0 = 0 - x_1^3 g(x_1) = 0 - x_1^3(-x_1) = x_1^4.$$

Άρα:

$$J = x_1^4 - 3 \int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^2 g(x) dx.$$

Με αντικατάσταση από τη σχέση (1):

$$J = x_1^4 - 3(1+\ln 2 - \pi^2/6 + x_1^4/4)$$

$$= x_1^4 - 3 - 3\ln 2 + \pi^2/2 - 3x_1^4/4$$

$$= x_1^4/4 + \pi^2/2 - 3\ln 2 - 3.$$

Τελικά:

$$\int_{[x_1 \rightarrow 0]} x^3 g'(x) dx = x_1^4/4 + \pi^2/2 - 3\ln 2 - 3.$$