

Αναλυτικές λύσεις Φυσικής Κατεύθυνσης 2013

Θέμα Α

A1

Σωστή απάντηση: γ) $f_A = f_S$.

Το περιπολικό και το αυτοκίνητο κινούνται με ίσες ταχύτητες προς την ίδια κατεύθυνση. Δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ πηγής και παρατηρητή, άρα δεν εμφανίζεται μεταβολή Doppler στη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο οδηγός.

A2

Σωστή απάντηση: γ) παραπλήσιες συχνότητες.

Διακρότημα προκύπτει από τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης και ίδιου πλάτους, όταν οι συχνότητές τους είναι πολύ κοντινές αλλά όχι ίσες.

A3

Σωστή απάντηση: δ) $F_{αντ} = -bv$.

Η εκθετική μείωση του πλάτους $A = A_0 e^{(-\lambda t)}$ αντιστοιχεί σε δύναμη αντίστασης ανάλογη της ταχύτητας και αντίθετης φοράς: $F_{αντ} = -bv$. Οι μειώσεις του πλάτους ανά περίοδο δεν είναι σταθερές, αλλά σταθερός είναι ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών.

A4

Σωστή απάντηση: γ) το διάνυσμα E είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης.

Στο ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο κενό, τα διανύσματα E και B είναι κάθετα μεταξύ τους και ταυτόχρονα κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης. Επίσης μηδενίζονται και μεγιστοποιούνται ταυτόχρονα.

A5

- α) Σωστό. Το όζον της στρατόσφαιρας απορροφά κυρίως την επικίνδυνη υπεριώδη ακτινοβολία.
- β) Λάθος. Στην AAT, όσο αυξάνεται $|F_{επ}|$ αυξάνεται και $|x|$, ενώ η ταχύτητα μειώνεται.
- γ) Σωστό. Στα μηχανικά κύματα μεταφέρονται ενέργεια και ορμή από σημείο σε σημείο του μέσου.
- δ) Λάθος. Η σταθερή γωνιακή ταχύτητα δεν εξασφαλίζει γενικά $\Sigma F = 0$ για οποιοδήποτε σφαιρικό στερεό. Η πρόταση με το «πάντα» είναι υπερβολική.
- ε) Σωστό. Στην έκκεντρη κρούση οι ταχύτητες των κέντρων μάζας είναι παράλληλες αλλά όχι συγγραμμικές.

Θέμα Β

B1

Δεδομένα: $C = 20 \cdot 10^{-6}$ F, $V_C = 20$ V, $L = (1/9) \cdot 10^{-3}$ H, $i = 6$ A.

Αρχικά όλη η ενέργεια είναι ηλεκτρική στον πυκνωτή:

$$E_0 = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 20^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

Τη στιγμή t_1 το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν, άρα η ενέργεια είναι μόνο μαγνητική στο πηνίο:

$$E_1 = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \cdot (1/9) \cdot 10^{-3} \cdot 6^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

Η μείωση της ενέργειας είναι:

$$\Delta E = E_0 - E_1 = 4 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

Σωστή απάντηση: ii) $2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

B2

Για δύο σύγχρονες πηγές, οι υπερβολές απόσβεσης δίνονται από τη συνθήκη:

$$|r_2 - r_1| = (2N + 1) \cdot \lambda / 2, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Μεταξύ των πηγών πρέπει να ισχύει $|r_2 - r_1| < d$.

Αρχικά $d = 2\lambda_1$. Άρα επιτρέπονται οι τιμές $\lambda_1/2$ και $3\lambda_1/2$, δηλαδή 2 τιμές από κάθε πλευρά, συνολικά 4 υπερβολές απόσβεσης, όπως λέει η εκφώνηση.

Όταν $f_2 = 3f_1$, η ταχύτητα διάδοσης μένει ίδια, άρα:

$$\lambda_2 = v/f_2 = v/(3f_1) = \lambda_1/3.$$

$$\text{Επομένως } d = 2\lambda_1 = 6\lambda_2.$$

$$\text{Θέλουμε: } (2N + 1) \cdot \lambda_2 / 2 < 6\lambda_2 \Rightarrow 2N + 1 < 12.$$

Άρα $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$: έξι υπερβολές από κάθε πλευρά.

Συνολικά: $2 \cdot 6 = 12$ υπερβολές απόσβεσης.

Σωστή απάντηση: iii) 12.

B3

Δεν ασκείται εξωτερική ροπή ως προς τον κατακόρυφο άξονα, άρα διατηρείται η στροφορμή του συστήματος.

Αρχικά στρέφεται μόνο ο δίσκος Δ1:

$$L_{\text{αρχ}} = I_1 \omega_1 = L_1.$$

Τελικά οι δύο δίσκοι στρέφονται με κοινή γωνιακή ταχύτητα ω :

$$L_{\text{τελ}} = (I_1 + I_2) \omega = (I_1 + I_1/4) \omega = (5/4) I_1 \omega.$$

Από διατήρηση στροφορμής:

$$I_1 \omega_1 = (5/4) I_1 \omega \Rightarrow \omega = (4/5) \omega_1.$$

Η τελική στροφορμή του δίσκου Δ1 είναι:

$$L_{1,\text{τελ}} = I_1 \omega = I_1 \cdot (4/5) \omega_1 = (4/5) L_1.$$

Άρα η μεταβολή της στροφορμής του Δ1 έχει μέτρο:

$$|\Delta L_1| = |(4/5) L_1 - L_1| = L_1/5.$$

Σωστή απάντηση: ii) $L_1/5$.

Θέμα Γ

Θεωρούμε θετική τη φορά της αρχικής κίνησης του Σ1 προς τα δεξιά. Η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο $T = \mu mg$, οπότε η επιβράδυνση σε κάθε σώμα, όταν κινείται σε οριζόντιο επίπεδο, είναι $a_{\text{τρ}} = \mu g = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ m/s}^2$.

Γ1. Αρχική ταχύτητα u_0

Έστω u η ταχύτητα του Σ1 ακριβώς πριν από την κρούση. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική και το Σ2 αρχικά ακίνητο. Για $m_2 = 2m_1$ ισχύει:

$$u_1' = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) \cdot u = (m_1 - 2m_1)/(m_1 + 2m_1) \cdot u = -u/3.$$

Δίνεται ότι αμέσως μετά την κρούση το Σ1 έχει ταχύτητα μέτρου $u_1' = 10 \text{ m/s}$ και αντίθετη φορά, άρα:

$$u/3 = 10 \Rightarrow u = 30 \text{ m/s}.$$

Το Σ1 πριν φτάσει στην κρούση διανύει $d = 1 \text{ m}$ με επιβράδυνση 5 m/s^2 . Από την εξίσωση:

$$u^2 = u_0^2 - 2\mu g d$$

$$30^2 = u_0^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 1$$

$$900 = u_0^2 - 10 \Rightarrow u_0^2 = 910.$$

$$u_0 = \sqrt{910} \text{ m/s} \approx 30,2 \text{ m/s}.$$

Γ2. Ποσοστό κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε στο Σ2

Η ταχύτητα του Σ2 αμέσως μετά την ελαστική κρούση είναι:

$$u_2' = 2m_1/(m_1 + m_2) \cdot u = 2m_1/(3m_1) \cdot 30 = 20 \text{ m/s}.$$

Κινητική ενέργεια του Σ1 ακριβώς πριν την κρούση:

$$K_{\text{πριν}} = 1/2 m_1 \cdot 30^2 = 450m_1.$$

Κινητική ενέργεια που απέκτησε το Σ2:

$$K_2' = 1/2 m_2 \cdot 20^2 = 1/2 \cdot 2m_1 \cdot 400 = 400m_1.$$

Άρα το ποσοστό που μεταφέρθηκε από το Σ1 στο Σ2 είναι:

$$\Pi = K_2'/K_{\text{πριν}} \cdot 100\% = (400m_1)/(450m_1) \cdot 100\% = 8/9 \cdot 100\% \approx 88,9\%.$$

Ποσοστό μεταφοράς: 88,9%.

Γ3. Συνολικός χρόνος κίνησης του Σ1

Ο χρόνος μέχρι την κρούση βρίσκεται από:

$$u = u_0 - \mu g t \Rightarrow t_{\text{πριν}} = (u_0 - u)/(\mu g).$$

Άρα:

$$t_{\text{πριν}} = (\sqrt{910} - 30)/5 \approx (30,17 - 30)/5 \approx 0,033 \text{ s}.$$

Μετά την κρούση το Σ1 κινείται προς τα αριστερά με μέτρο ταχύτητας 10 m/s και επιβραδύνεται από την τριβή με επιτάχυνση μέτρου 5 m/s^2 .

Ο χρόνος μέχρι να σταματήσει είναι:

$$t_{\text{μετά}} = 10/5 = 2 \text{ s}.$$

Συνολικά:

$$t_{\text{ολ}} = t_{\text{πριν}} + t_{\text{μετά}} = (\sqrt{910} - 30)/5 + 2 \approx 2,033 \text{ s}.$$

$t_{\text{ολ}} \approx 2,03 \text{ s}$.

Γ4. Μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου

Για το Σ2: $m_2 = 1 \text{ kg}$, $k = 10^5 \text{ N/m}$, $u_2' = 20 \text{ m/s}$. Από τη στιγμή μετά την κρούση μέχρι τη μέγιστη συσπίρωση, η κινητική ενέργεια του Σ2 μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια ελατηρίου και σε έργο κατά της τριβής.

Στη μέγιστη συσπίρωση η ταχύτητα είναι μηδέν, άρα:

$$1/2 m_2 u_2'^2 = 1/2 k x^2 + \mu m_2 g x.$$

$$1/2 \cdot 1 \cdot 20^2 = 1/2 \cdot 10^5 \cdot x^2 + 0,5 \cdot 1 \cdot 10 \cdot x$$

$$200 = 50000x^2 + 5x$$

$$50000x^2 + 5x - 200 = 0.$$

Η θετική ρίζα είναι:

$$x = [-5 + \sqrt{5^2 + 4 \cdot 50000 \cdot 200}] / (2 \cdot 50000)$$

$$x = [-5 + \sqrt{400000025}] / 100000 \approx 0,0632 \text{ m.}$$

Μέγιστη συσπείρωση: $x \approx 0,063 \text{ m} = 6,3 \text{ cm}$.

Θέμα Δ

Δ1. Επιτάχυνση συμπαγούς κυλίνδρου

Για κύλιση χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο ισχύει:

$$Mg\eta\mu\phi - T = Ma$$

$$TR = I\alpha_{\text{γων}}, \text{ με } \alpha_{\text{γων}} = a/R.$$

$$\text{Για συμπαγή ομογενή κύλινδρο: } I = 1/2 MR^2.$$

Άρα από τη ροπή:

$$T R = (1/2 MR^2)(a/R) \Rightarrow T = 1/2 Ma.$$

Στην εξίσωση μεταφορικής κίνησης:

$$Mg\eta\mu\phi - 1/2 Ma = Ma$$

$$Mg\eta\mu\phi = 3/2 Ma$$

$$\mathbf{a = (2/3)g\eta\mu\phi.}$$

Δ2. Ροπή αδράνειας κοίλου κυλίνδρου

Ο αρχικός συμπαγής κύλινδρος έχει μάζα M , ακτίνα R και ύψος h . Η πυκνότητά του είναι σταθερή.

Ο όγκος του αρχικού κυλίνδρου είναι $V = \pi R^2 h$, ενώ ο όγκος του κυλινδρικού τμήματος που αφαιρείται είναι $V_{\text{εσ}} = \pi r^2 h$.

Άρα η μάζα που αφαιρείται είναι:

$$m_{\text{εσ}} = M \cdot V_{\text{εσ}}/V = M \cdot r^2/R^2.$$

Ροπή αδράνειας αρχικού συμπαγούς κυλίνδρου:

$$I_{\text{ολ}} = 1/2 MR^2.$$

Ροπή αδράνειας του αφαιρούμενου εσωτερικού κυλίνδρου:

$$I_{\text{εσ}} = 1/2 m_{\text{εσ}} r^2 = 1/2 \cdot M(r^2/R^2) \cdot r^2 = 1/2 M r^4/R^2.$$

Άρα η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου είναι:

$$I_{\text{κοιλ}} = I_{\text{ολ}} - I_{\text{εσ}} = 1/2 MR^2 - 1/2 M r^4/R^2$$

$$I_{\text{κοιλ}} = 1/2 MR^2 [1 - r^4/R^4].$$

$$\mathbf{I_{κοιλ} = (1/2)MR^2(1 - r^4/R^4).}$$

Δ3. Επιτάχυνση του συστήματος μετά την επανατοποθέτηση

Το εσωτερικό κυλινδρικό τμήμα έχει λιπανθεί, άρα δεν ασκείται τριβή μεταξύ αυτού και του κοίλου κυλίνδρου.

Επομένως, στην περιστροφική κίνηση συμμετέχει μόνο ο κοίλος κύλινδρος. Στη μεταφορική κίνηση όμως συμμετέχει όλη η μάζα M του συστήματος.

Για το σύστημα στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου:

$$Mg\eta\mu\phi - T = Ma.$$

Για την περιστροφή του κοίλου κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του:

$$TR = I_{\text{κούλ}} \cdot a/R.$$

Άρα:

$$T = I_{\text{κούλ}} \cdot a/R^2.$$

Αντικατάσταση στη μεταφορική εξίσωση:

$$Mg\eta\mu\phi - I_{\text{κούλ}} a/R^2 = Ma$$

$$Mg\eta\mu\phi = a(M + I_{\text{κούλ}}/R^2)$$

$$a = Mg\eta\mu\phi / (M + I_{\text{κούλ}}/R^2).$$

$$\text{Με } I_{\text{κούλ}} = 1/2 MR^2(1 - r^4/R^4):$$

$$I_{\text{κούλ}}/R^2 = 1/2 M(1 - r^4/R^4).$$

Άρα:

$$a = Mg\eta\mu\phi / \{M + 1/2 M(1 - r^4/R^4)\}$$

$$a = g\eta\mu\phi / \{1 + 1/2(1 - r^4/R^4)\}$$

$$\mathbf{a = 2g\eta\mu\phi / [3 - r^4/R^4].}$$

Δ4. Λόγος μεταφορικής προς περιστροφική κινητική ενέργεια για $r = R/2$

Για $r = R/2$ έχουμε:

$$r^4/R^4 = (1/2)^4 = 1/16.$$

Άρα:

$$I_{\text{κούλ}} = 1/2 MR^2(1 - 1/16) = 1/2 MR^2 \cdot 15/16 = 15/32 MR^2.$$

Η μεταφορική κινητική ενέργεια όλου του συστήματος είναι:

$$K_{\text{μετ}} = 1/2 Mu^2.$$

Η περιστροφική κινητική ενέργεια οφείλεται στον κοίλο κύλινδρο:

$$K_{\text{περ}} = 1/2 I_{\text{κούλ}}\omega^2.$$

Για κύλιση χωρίς ολίσθηση: $u = \omega R$.

Άρα:

$$K_{\text{μετ}}/K_{\text{περ}} = (1/2 Mu^2)/(1/2 I_{\text{κούλ}}\omega^2) = M(\omega^2 R^2)/(I_{\text{κούλ}}\omega^2) = MR^2/I_{\text{κούλ}}.$$

$$K_{\text{μετ}}/K_{\text{περ}} = MR^2/(15/32 MR^2) = 32/15.$$

$$\mathbf{K_{\text{μετ}} / K_{\text{περ}} = 32/15.}$$